PC
Mathématiques · Informatique
2024

Sous la coordination de

William AUFORT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (de Lyon)

Florian METZGER
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent PUYHAUBERT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Hugo DA CUNHA
ENS de Lyon

Vincent FERRARI-DOMINGUEZ
ENS Ulm

Julie GAUTHIER
professeur agrégé

Sarah HOUDAIGOUI
ENS Ulm

Guillaume INGELAERE
École Polytechnique

Loïc JEAN
ENS de Lyon

Vincent LEROUVILLOIS
ENS de Lyon

Malory MARIN
ENS de Lyon

Hai Chau NGUYEN
ENS de Lyon

Cyril RAVAT
professeur en CPGE

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2024 **PC8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

e3a Mathématiques PC 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Ingelaere (École polytechnique) ; il a été relu par Nicolas Nelson (ENS Ulm) et Christophe Fiszka (professeur en CPGE).

Ce sujet comporte 4 exercices qui utilisent la majeure partie du programme.

- L'exercice 1 se penche sur des applications linéaires dans l'espace vectoriel des polynômes. Il fait appel aux principales propriétés des valeurs propres. On étudie une forme linéaire définie par une intégrale qui sert ensuite à définir un endomorphisme dont on étudie le spectre.
- L'exercice 2 s'intéresse à des variables aléatoires entières définies à partir d'une variable suivant une loi de Poisson, et cherche à déterminer leurs lois de probabilité en utilisant les développements en série entière des fonctions hyperboliques.
- Dans l'exercice 3, on étudie la série de terme général $\sin(n^\alpha)/n$, dans le but de montrer que c'est une série semi-convergente, c'est-à-dire convergente mais non absolument convergente. Pour cela, on réalise notamment des études de fonctions et d'intégrales, ce qui permet d'aborder tous les domaines de l'analyse.
- L'exercice 4 introduit un produit scalaire défini à partir de séries dans l'espace des polynômes. L'objectif est de calculer une distance à un sous-espace vectoriel, en utilisant des séries de fonctions. Cet exercice est un peu plus exigeant que les trois précédents car il mène à des résultats plus éloignés du programme.

Ce sujet est un bon départ pour se familiariser avec les attentes du programme (théorèmes fondamentaux en analyse et leurs hypothèses, lois de probabilité ou développements de série entière à connaître...). Il reprend pour l'essentiel des notions et des calculs qui ont été abordés en cours. Les raisonnements sont très guidés.

SESSION 2024 **PC1M**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

CCINP Maths PC 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Ferrari-Dominguez (ENS Ulm) ; il a été relu par Quentin Vermande (ENS Ulm) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet comporte trois exercices totalement indépendants. Le premier propose d'étudier la notion de racine cubique d'une matrice. Le deuxième s'intéresse à une famille de propriétés caractérisant la fonction $\ln(\Gamma)$, où Γ est la fonction Gamma d'Euler. Le dernier cherche à estimer le temps moyen avant lequel un objet est de nouveau obtenu dans le problème du collectionneur.

- Une fois la notion de racine cubique définie, l'exercice 1 commence par traiter un exemple en dimension 2 et détermine son unique racine cubique. Il traite ensuite le cas des matrices orthogonales en dimension 2. La dernière partie consiste à généraliser la méthode développée sur l'exemple initial aux matrices diagonalisables en dimension quelconque puis à montrer à l'aide de polynômes annulateurs que les racines cubiques sont, dans ce cas, diagonalisables sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
- L'exercice 2 consiste dans un premier temps à déterminer les fonctions $\mathscr{C}^1$, convexes, nulles en 1 et vérifiant l'équation fonctionnelle

  $$\forall x \in \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad \varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$$

  Ces propriétés n'ont pas été choisies au hasard : elles caractérisent la fonction $\ln(\Gamma)$. L'exercice construit d'abord une solution à cette équation fonctionnelle à l'aide de séries de fonctions. Il prouve ensuite l'unicité des solutions $\mathscr{C}^1$, convexes et nulles en 1 de l'équation. Cette unicité est finalement utilisée pour démontrer la formule de duplication de la fonction Γ.
- Le troisième exercice s'attaque à la question suivante : un joueur tire des boules avec remise dans une urne qui en contient n différentes, quand tirera-t-il pour la première fois une boule déjà tirée précédemment ? L'espérance de ce temps d'attente est exprimé sous la forme d'une somme dépendant de n puis sous la forme d'une intégrale. Le reste de l'exercice est dédié à l'analyse asymptotique de cette suite d'intégrales.

Ce sujet mobilise des chapitres variés du programme de PC. Le premier exercice permet de réviser la réduction des endomorphismes. Le deuxième est un bon entraînement aux séries de fonctions et à l'analyse réelle. Le dernier contient en réalité peu de probabilités et se concentre plutôt sur l'étude asymptotique d'une suite d'intégrales.

SESSION 2024 **PC5IN**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

INFORMATIQUE

Durée : 3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties.

L'épreuve est à traiter en langage **Python** sauf pour les bases de données.
Les différents algorithmes doivent être rendus dans leur forme définitive sur le **Document Réponse** dans l'espace réservé à cet effet en respectant les éléments de syntaxe du langage (les brouillons ne sont pas acceptés).
La réponse ne doit pas se limiter à la rédaction de l'algorithme sans explication, les programmes doivent être expliqués et commentés de manière raisonnable.

Énoncé et Annexe : 16 pages
Document Réponse : 12 pages

Seul le Document Réponse doit être rendu dans son intégralité (le QR Code doit être collé sur la première page de ce Document Réponse).

CCINP Informatique PC 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Malory Marin (ENS de Lyon) ; il a été relu par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Le sujet aborde un jeu de stratégie de la famille des jeux de semailles, l'awalé. Le but est d'implémenter en Python une version du jeu et de programmer une intelligence artificielle pour ce jeu basée sur l'algorithme MinMax.

- La partie I présente les règles du jeu. Le but est de comprendre, via des exemples, leurs subtilités. Cette partie est cruciale pour la compréhension du reste du sujet.
- La partie suivante propose d'implémenter des fonctions correspondant à une partie entre deux joueurs humains. On écrit d'abord des fonctions permettant de représenter le jeu via un dictionnaire. Ensuite, on implémente un tour de jeu en trois étapes : tester si le coup souhaité est valide, mettre à jour le plateau et enfin tester si la partie est finie.
- Dans la partie III, on programme une intelligence artificielle pour le jeu. On utilise pour cela une variante de l'algorithme MinMax appelée NegaMax. L'algorithme consiste à simuler les gains potentiels dans un arbre des possibilités à profondeur fixe, puis à sélectionner le meilleur coup trouvé. Le sujet commence par tester la compréhension de l'algorithme sur un exemple avant de le programmer réellement. La fin du sujet consiste à écrire des requêtes dans une base de données relationnelle.

Ce sujet est une belle introduction à la théorie des jeux mais demande initialement un effort conséquent de compréhension des règles. L'implémentation de la structure du jeu est ensuite assez directe, sans réelle difficulté algorithmique. La troisième partie est parfaite pour comprendre l'algorithme MinMax en profondeur. De nombreuses fois, il est demandé de compléter une fonction plutôt que de donner une implémentation complète. Cela permet de se concentrer sur la compréhension des algorithmes plutôt que sur les difficultés techniques de la structuration d'un programme.

Comme l'année dernière, les réponses se font exclusivement sur un document réponse unique, ce qui peut perturber les candidats : la place disponible pour chaque explication et chaque code est fortement contrainte, et l'erreur conduisant à une réécriture massive est quasiment interdite. Nous vous conseillons donc de vous entraîner au cours de l'année à utiliser correctement un brouillon, et à rendre des copies concises et sans rature.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2024

4 heures Calculatrice autorisée

Ce sujet comporte quatre parties, qui peuvent être traitées indépendamment :

— La partie I étudie deux façons d'approcher le réel $\sqrt{2}$.

— La partie II généralise la méthode de Héron d'Alexandrie étudiée en sous-partie I.B au cadre des matrices symétriques positives.

— La partie III traite le cas général de la méthode de Newton numérique réelle.

— La partie IV s'inspire de la méthode de Newton abordée en partie III pour établir l'existence de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford, par une approche algorithmique et en donne une application à la détermination de la racine carrée de certaines matrices.

Notations

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et q est un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille q à coefficients dans $\mathbb{K}$; on note I_q la matrice identité dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et P^{T} la transposée d'une matrice P. On note $\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{O}(q)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $P^{\mathrm{T}}P = I_q$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de M.

Pour $a_1, ..., a_q \in \mathbb{K}$, on note $\operatorname{diag}(a_1, ..., a_q)$ la matrice A de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant q$:

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$. On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants :

pour toute suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$,

— la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant q$, la suite $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$;

— si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, alors les suites $(AM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_nA)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AM et MA.

I Quelques approximations de $\sqrt{2}$.

I.A – Via un développement en série entière.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k).$$

Q 1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ vaut :

$$R = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Q 2. Donner, sans justification supplémentaire, l'expression de la fonction somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ sur $]-R,R[$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} b_n x^n.$$

Centrale Maths 1 PC 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hai Châu Nguyên (ENS de Lyon) ; il a été relu par Youssef Yjjou (ENS de Lyon) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

Le sujet porte sur des méthodes numériques pour le calcul de racines carrées de nombres réels positifs et de certaines familles de matrices. Il est ponctuellement demandé de rédiger une suite d'instructions en Python permettant de les implémenter.

- Dans la partie I, le sujet aborde deux techniques de calcul d'approximations de $\sqrt{2}$. La première passe par des développements en séries entières et la seconde est une méthode ancienne attribuée à Héron d'Alexandrie introduisant une suite récurrente non linéaire d'ordre 1. Les vitesses de convergence de ces deux méthodes sont comparées.
- La partie suivante débute par la recherche d'une infinité de racines carrées de la matrice I_2 avant de s'intéresser au cas des matrices symétriques positives. Pour ce type de matrice, on justifie dans un premier temps l'existence et l'unicité d'une racine symétrique positive, avant d'en donner une méthode de calcul s'inspirant de la seconde méthode de la partie I.
- La partie III étudie la méthode de Newton numérique réelle, qui généralise la méthode de Héron d'Alexandrie. Elle permet d'approcher l'unique point d'annulation d'une fonction réelle avec une vitesse de convergence remarquablement rapide, sous certaines conditions de régularité néanmoins assez restrictives. La preuve de la convergence passe par des arguments analytiques, notamment l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- La dernière partie propose une application algébrique de la méthode précédente pour obtenir une construction algorithmique de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford. Cette décomposition est utilisée pour calculer une racine carrée de matrices qui ne sont pas forcément symétriques positives.

Certains morceaux de ce sujet sont abordables dès la sup : les suites récurrentes des sous-parties I.B et I.C ainsi que l'analyse des fonctions réelles dans la partie III. Le reste permet de travailler les séries entières et la réduction des matrices.

Mathématiques 2

PC

2024

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Notations

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

— La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.

— La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.

— La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.

— La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.

— Enfin, la partie V étudie la fonction Γ. Elle utilise quelques résultats des parties I, III et IV.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod\limits_{n \geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n.$$

I Résultats préliminaires

***I.A* –** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 1. Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

Q 2. Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

***I.B* –** Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^z.

Q 3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\left| (1 + t) - \mathrm{e}^t \right| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}.$$

Q 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.

Centrale Maths 2 PC 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hugo Da Cunha (ENS de Lyon) ; il a été relu par Thierry Limoges (professeur en CPGE) et Angèle Niclas (enseignant-chercheur).

On étudie très souvent des objets définis par une série, c'est-à-dire une somme infinie d'autres objets qui sont bien souvent des réels ou des fonctions. L'objectif de ce sujet d'analyse est d'étudier l'analogue lorsque l'on remplace les sommes par des produits.

- La partie I est consacrée à des résultats généraux qui seront utiles dans toutes les parties suivantes.
- Dans la partie II, on cherche à calculer la valeur du produit infini des termes consécutifs de différentes suites. Pour cela, on fait par exemple appel aux intégrales de Wallis. Les deux dernières questions de cette partie donnent une application des produits infinis en probabilités, notamment pour démontrer le lemme de Borel-Cantelli.
- La partie III s'intéresse en toute généralité aux produits infinis de fonctions. Elle vise à démontrer des analogues aux théorèmes de continuité et de dérivation de la somme d'une série. L'étude d'un cas particulier est l'objet de deux questions en milieu de partie.
- Dans la partie IV, on établit un développement de la fonction sinus sous la forme d'un produit infini. Au passage, le théorème de dérivation prouvé dans la partie III permet d'en déduire la somme de la série $\sum 1/n^2$.
- Enfin, dans la partie V, on s'intéresse à la fonction Γ dont on établit une expression sous la forme d'un produit infini de fonctions.

Ce sujet transpose donc des notions sur les sommes infinies dans le cas des produits infinis. Il fait appel à tout le programme d'analyse de deuxième année, et les parties III et IV requièrent une connaissance solide des chapitres sur les suites et séries de fonctions. Travailler ces chapitres avec ce sujet sera plus profitable pendant les révisions qu'en cours d'année, car les questions sont assez techniques et répétitives.

A2024 – MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Maths 1 PC 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Lerouvillois (professeur agrégé à l'université) ; il a été relu par Théotime Moutte (ENS Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Le sujet propose une définition mathématique de l'entropie à partir de l'intégrale généralisée de fonctions dites « à croissance lente ». L'objectif est d'en établir une majoration connue sous le nom d'inégalité de log-Sobolev.

- Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des fonctions à croissance lente (intégrabilité, stabilité de l'ensemble par certaines opérations...) et de certaines intégrales à paramètre définies à partir de fonctions à croissance lente.
- La deuxième partie aborde la régularité des intégrales définies dans la partie précédente par rapport à leurs différents paramètres et établit une relation entre leurs dérivées partielles.
- La dernière partie définit l'entropie pour certaines fonctions à croissance lente et établit l'inégalité de log-Sobolev au moyen de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des résultats établis dans les parties précédentes.

Le problème est très bien guidé, progressif et centré sur la notion d'intégrales généralisées du programme d'analyse de PC. La plupart des résultats sophistiqués étant admis, le sujet ne présente pas de réelle difficulté. Néanmoins, il nécessite de savoir majorer efficacement certaines fonctions dans le but d'appliquer les principaux théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.

A2024 – MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Maths 2 PC 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Jean (ENS de Lyon) ; il a été relu par Hugo Da Cunha (ENS de Lyon) et Christophe Fiszka (professeur en CPGE).

Ce problème d'algèbre linéaire consiste à étudier les propriétés des *matrices de distance euclidienne*, où les coefficients sont les carrés des distances euclidiennes entre des points de $\mathbb{R}^n$.

- La première partie introduit les matrices de Hadamard, qui seront utilisées dans la dernière partie. On en donne des exemples pour des petits ordres avant de démontrer qu'il n'existe pas de matrices de Hadamard de tout ordre.
- La partie II est indépendante et porte sur le théorème de Courant-Fisher. Ce résultat est un grand classique des concours, et intervient aussi bien dans de nombreux sujets d'écrits que, sous des formes généralement simplifiées, dans des planches d'oraux. Les techniques utilisées dans cette partie sont classiques, assez proches du cours.
- La partie suivante fournit une condition suffisante sur le signe des coefficients et la forme du spectre d'une matrice pour que celle-ci soit une matrice de distance euclidienne.
- Dans la quatrième partie, on démontre que la condition suffisante de la troisième partie est en fait nécessaire.
- La dernière partie se concentre sur le problème inverse : étant donné un spectre qui vérifie les hypothèses des deux parties précédentes, est-il toujours possible de construire une matrice de distance euclidienne avec ce spectre ? Les matrices de Hadamard étudiées dans la première partie permettent cette construction.

Ce problème est un bon moyen de tester ses connaissances sur le programme d'algèbre linéaire et bilinéaire de PC. C'est aussi un excellent entraînement à la manipulation du produit matriciel. Il est fortement conseillé de bien connaître les outils employés dans la partie II.

A2024 – IC

Concours commun
Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE COMMUNE

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout autre dispositif électronique est interdit.

Cette épreuve est commune aux candidats des filières MP, PC et PSI.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

INFORMATIQUE COMMUNE

L'énoncé de cette épreuve comporte 12 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Malory Marin (ENS de Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet traite de la communication de chaînes de caractères à travers un canal non fiable. Deux points importants sont abordés : la compression des données et la correction après transmission des informations.

- Dans la partie I, on étudie le fonctionnement d'un codage arithmétique des chaînes de caractères, une méthode de compression qui transforme n'importe quelle chaîne en nombre décimal. Après quelques questions préliminaires portant sur la lecture analytique d'un texte et deux questions de SQL, on aborde plus spécifiquement l'algorithme de compression, pour le codage et le décodage, notamment à partir d'exemples.
- La partie II introduit en profondeur une technique de correction d'un message reçu, connaissant des probabilités d'émission et des probabilités conditionnelles de réception. On construit un graphe représentant l'ensemble des messages possibles, assimilable à des cases de tableaux à deux dimensions, et on essaie d'y trouver le chemin optimal par deux méthodes : un algorithme glouton et un algorithme de programmation dynamique, l'algorithme de Viterbi.

Le sujet est bien construit et très progressif. De nombreuses questions sont simples et permettent aux élèves de niveau modeste de vérifier leur capacité à enchaîner des réponses. Dans la deuxième partie, l'introduction du problème, longue mais intéressante et bien détaillée, offre la possibilité de coder sur le même graphe un algorithme glouton et un algorithme de programmation dynamique. De nombreuses questions de complexité complètent l'ensemble et font de ce sujet un bon entraînement.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2024

LUNDI 15 AVRIL 2024
08h00 - 12h00

FILIERE PC - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XEULS)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Maths PC 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julie Gauthier (professeur agrégé) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Le sujet introduit la notion de déplacement dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la structure de l'ensemble de ces objets, puis on définit la distance à déplacement près entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$. Enfin, on établit une formule pour calculer cette distance dans deux cas particuliers.

- La partie 1 est constituée de plusieurs questions (presque toutes de cours) sur les matrices orthogonales.
- Dans la partie 2, on définit l'ensemble des déplacements de $\mathbb{R}^d$, noté $\operatorname{Dep}(\mathbb{R}^d)$. On montre ensuite que cet ensemble, muni d'une loi de composition interne bien choisie, est un groupe, en général non commutatif sauf dans le cas trivial où $d = 1$. La notion de groupe n'étant pas au programme de la filière PC, on se contente de montrer toutes ses propriétés, sans les nommer.
- La partie suivante a pour objectif la définition et l'étude de la distance à déplacement près.
- Dans la partie 4, on étudie un problème d'optimisation afin d'obtenir une formule, contenant une borne supérieure, pour le calcul de la distance à déplacement près d'un couple de vecteurs (x, y) de $\mathbb{R}^d$. Cette formule fait aussi intervenir une matrice $\mathrm{Z}(x, y) \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ dont on établit une expression.
- La partie 5 traite du cas où $\det\big(\mathrm{Z}(x, y)\big) > 0$. On détermine la borne supérieure obtenue à la fin de la partie 4 afin d'établir une formule pour le calcul de la distance à déplacement près.
- Dans la dernière partie, on recommence l'étude menée dans la partie 5 dans le cas où $\det\big(\mathrm{Z}(x, y)\big) < 0$.

Ce sujet constitue un très bon support de révision sur l'algèbre linéaire et bilinéaire. La plupart des questions sont abordables et nombre d'entre elles s'avèrent très proches du cours.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2024

JEUDI 18 AVRIL 2024
16h30 - 18h30

FILIERES MP-MPI-PC-PSI
Epreuve n° 8

INFORMATIQUE B (XELSR)

Durée : 2 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et William Aufort (professeur en CPGE).

Le sujet examine les logimages, un jeu consistant à noircir les cases d'une grille en utilisant des indications données pour chaque ligne et chaque colonne. Il se compose de quatre parties, largement indépendantes et de difficulté croissante.

- La partie I vise à écrire et étudier diverses fonctions vérifiant la validité d'une solution.
- La partie suivante cherche à résoudre le problème à l'aide de fonctions récursives en explorant toutes les grilles possibles. Une analyse de complexité permet de montrer l'inefficacité de l'algorithme sur de grandes grilles.
- La partie III traite du placement d'un bloc dans une ligne dont certaines cases sont déjà déterminées. Cette partie est très courte (deux questions seulement) mais contient la question la plus difficile du sujet, l'élaboration d'un algorithme astucieux et un calcul de complexité extrêmement fin.
- La dernière partie utilise les résultats obtenus dans la partie III afin de déterminer les première et dernière positions possibles pour chaque bloc d'une ligne et en déduire la couleur de certaines cases.

Le sujet se focalise sur l'algorithmique des listes et des matrices et le calcul de complexité. Les trois premières questions de la partie I constituent un bon entraînement sur ces thèmes. La question 4 de la partie I permet de travailler la compréhension d'un code et de s'entraîner à vérifier la correction d'une fonction. La partie II permet d'aborder les algorithmes manipulant des matrices et les fonctions récursives. La difficulté majeure de la partie III réside dans la présence d'un calcul très fin et astucieux de complexité. Cette partie et la suivante comportent des questions algorithmiques et de complexité de haut niveau qui demandent une bonne compréhension des raisonnements de résolution des logimages.