

ANNALES DES CONCOURS

PSI

Physique · Modélisation · Chimie

2015

Sous la coordination de

Julien DUMONT

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Vincent FREULON

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Alexandre HÉRAULT

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Virgile ANDREANI
ENS Ulm

Claire BESSON
Docteur en chimie

Julien DUMONT
Professeur en CPGE

Olivier FRANTZ
Professeur agrégé en école d'ingénieurs

Vincent FREULON
Professeur en CPGE

Alexandre HÉRAULT
Professeur en CPGE

Cyril JEAN
ENS Ulm

Guillaume MAIMBOURG
ENS Cachan

Fabrice MAQUÈRE
Professeur agrégé

Tom MOREL
Professeur en CPGE

Christelle SERBA
Docteur en chimie

Sommaire thématique de physique

2015

e3a PSI Physique-Modélisation				•					•	
e3a PSI Physique et Chimie	•	•	•							
CCP MP Physique			•	•					•	•
CCP MP Physique et Chimie	•	•								
CCP PC Physique	•	•		•		•	•			•
CCP PC Modélisation Phys-Chimie										
CCP PSI Physique et Chimie	•		•	•		•			•	
CCP PSI Modélisation numérique		•								
Centrale MP Physique et Chimie 1		•		•		•			•	
Centrale MP Physique et Chimie 2			•	•					•	
Centrale PC Physique 1				•			•	•		
Centrale PC Physique 2		•	•			•	•			
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•		•						•	
Centrale PSI Physique et Chimie 2				•	•	•		•	•	•
Mines MP Physique 1	•					•			•	
Mines MP Physique 2			•			•			•	
Mines PC Physique 1	•					•	•		•	
Mines PC Physique 2	•					•	•	•		
Mines PSI Physique 1	•					•	•		•	
Mines PSI Physique 2	•						•			
X/ENS MP Physique						•		•		
X MP Physique et SI	•					•		•		
X PC Physique A						•				•
X/ENS PC Physique B			•			•			•	
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Électrostatique et magnétostatique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique

Sommaire

Énoncé
Corrigé

E3A

Physique et Modélisation	Système RFID. <i>électronique, électromagnétisme, méthode des rectangles, algorithmique</i>	11	24
Physique et Chimie	Optimisation de rendements thermodynamiques. Conversion d'énergie électrostatique par les phénomènes atmosphériques et nucléaires. <i>thermodynamique générale, phénomènes diffusifs, électrostatique, thermodynamique chimique</i>	42	51

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

Physique et Chimie	Orage et foudre. Obtention de nickel par électrolyse. <i>électromagnétisme, mécanique du point, thermodynamique générale, électronique, oxydoréduction, courbes courant-potentiel</i>	69	80
Modélisation et Ingénierie numérique	Dispositif médical d'injection. <i>asservissements, mécanique du solide, mécanique des fluides, diffusion thermique, informatique</i>	94	110

CENTRALE-SUPÉLEC

Physique et Chimie 1	Le projet Hyperloop. <i>thermodynamique générale, électrostatique et magnétostatique, électromagnétisme, cristallographie, oxydoréduction</i>	121	129
Physique et Chimie 2	Motorisation et mise au point autofocus. <i>optique géométrique, conversion de puissance, ondes sonores, mécanique du point, électronique</i>	146	154

MINES-PONTS

Physique 1	Aspects de la propulsion spatiale. <i>thermodynamique, mécanique, électromagnétisme</i>	177	183
Physique 2	Machines à écoulement permanent. <i>thermodynamique générale, mécanique des fluides</i>	197	204
Chimie	Métallurgie du lithium. <i>cristallographie, solutions aqueuses, oxydoréduction, courbes courant-potentiel, thermodynamique</i>	217	223

FORMULAIRES

Constantes physiques	235
Constantes chimiques	232
Formulaire d'analyse vectorielle	236
Classification périodique	240

Sommaire thématique de chimie

2015

e3a PSI Physique et Chimie							•				
CCP MP Physique et Chimie	•				•	•	•				
CCP PC Chimie	•	•	•				•	•	•	•	•
CCP PC Modélisation Phys-Chimie											
CCP PSI Physique et Chimie				•		•					
Centrale MP Physique et Chimie 1	•										
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•		•	•	•					
Centrale PC Chimie	•			•	•				•	•	•
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•			•							
Centrale PSI Physique et Chimie 2											
Mines MP Chimie	•	•		•		•	•				
Mines PC Chimie		•	•	•	•				•		
Mines PSI Chimie	•	•		•		•	•				
X/ENS PC Chimie			•	•			•		•		
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination

**CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH****Épreuve de Physique - Modélisation PSI**

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est autorisé.

AVERTISSEMENT

Les parties A, B, C, D, et les parties E, F, G sont à rédiger sur copies séparées.
--

Remarques importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que

- Il faudra exclusivement utiliser les notations de l'énoncé.
- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques (données avec un nombre de chiffres significatifs adapté) ; les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés (S.I. n'est pas une unité).
- Tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).
- **Un document réponse est à rendre non plié avec la copie de la deuxième partie.**

Ce problème traite de systèmes d'identification par radio fréquence (RFID). Aucune connaissance particulière sur les antennes n'est demandée.

La **radio-identification**, le plus souvent désignée par le sigle **RFID** (de l'anglais *radio frequency identification*), est une méthode pour mémoriser et récupérer des données à distance en utilisant des marqueurs appelés « radio-étiquettes » (« RFID tag » ou « RFID transponder » en anglais). Les radio-étiquettes peuvent être des étiquettes autoadhésives, pouvant être collées sur des objets. Les radio-étiquettes comprennent une antenne associée à une puce électronique qui leur permet de recevoir et de répondre aux requêtes radio émises (signal radiofréquence) depuis un émetteur-récepteur.

Cette puce électronique contient un identifiant et éventuellement des données complémentaires. Les puces RFID tentent aujourd'hui de supplanter les codes à barres en jouant de leurs avantages, à savoir qu'il est possible d'écrire, d'effacer et de réécrire les données stockées dans la puce un grand nombre de fois, que leur portée peut être supérieure aux lecteurs optiques utilisés pour les codes à barres, et que la communication peut se faire à travers certains obstacles contrairement aux systèmes à lecture optique.

Un système RFID passif est composé de deux entités qui communiquent entre elles (Fig. 0) :

- Un TAG passif (dénommé TAG par la suite) ou radio-étiquette, associé à l'élément à identifier. Il est capable de répondre à une demande venant du système émetteur - récepteur. Le TAG n'a pas d'alimentation de type batterie ou pile mais est autoalimenté par l'onde électromagnétique reçue (il existe cependant des TAG actifs alimentés par pile).
- Une station de base ou lecteur RFID qui a pour mission d'identifier le TAG. Le lecteur envoie une onde électromagnétique en direction de l'élément à identifier, cette onde alimente le TAG qui peut alors communiquer avec le générateur - lecteur grâce à sa puce électronique interne. En retour, le générateur - lecteur reçoit l'information renvoyée par le TAG.

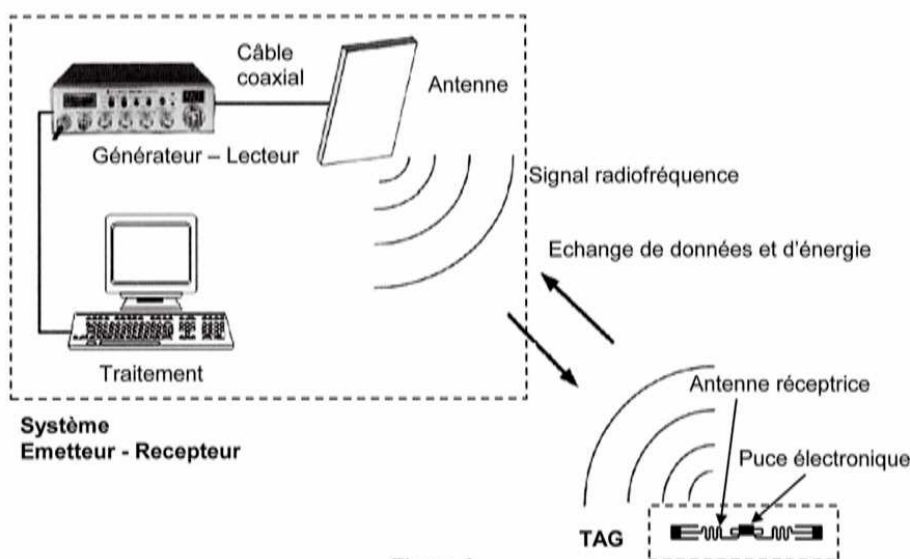


Figure 0

La figure 0 présente le fonctionnement général d'un système RFID. Le générateur - lecteur relié à une antenne émettrice agit en maître par rapport au TAG : si le TAG est dans la zone de lecture du générateur - lecteur, ce dernier l'active en lui envoyant une onde électromagnétique et entame la communication. Le TAG est quant à lui, constitué d'une antenne et d'une puce électronique qui

e3a Physique et Modélisation PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Le stockage RFID est étudié dans ce problème, d'un point de vue physique et informatique. Un tel système est constitué d'une étiquette autocollante baptisée TAG et d'un émetteur-récepteur. L'étiquette contient une puce de gestion d'événements, qui permet de traiter et mémoriser les informations, et une antenne, qui sert à échanger à distance des informations avec l'émetteur-récepteur. Ce dernier est composé d'un générateur, d'une antenne et d'un système de traitement de l'information. L'une des particularités distinctives du RFID est que le TAG est le plus souvent passif : il tire son énergie des ondes émises par l'antenne de l'émetteur-récepteur. Ce système a vocation à remplacer les codes-barres dans de nombreuses situations, par exemple pour la gestion des stocks dans un entrepôt.

- La première partie porte sur la conception d'un circuit de transfert de puissance qui prépare l'étude des transferts de puissance entre les antennes. C'est une partie proche du cours et sa contextualisation permet de poser des questions originales et intéressantes.
- La deuxième partie, beaucoup plus calculatoire, étudie le câble coaxial destiné à relier le générateur à l'antenne émettrice.
- La troisième partie s'intéresse à la conception et au dimensionnement de l'antenne. On étudie le champ électromagnétique rayonné par l'émetteur pour en déduire les caractéristiques géométriques optimisant le transfert d'énergie vers l'antenne réceptrice. Certaines questions sont délicates et nécessitent une vision d'ensemble du cours.
- La quatrième partie combine des éléments étudiés précédemment pour dimensionner le TAG de réception. Les thématiques abordées sont sensiblement les mêmes que dans la première partie, à un niveau plus élevé.
- Suivent trois courtes parties d'informatique qui reviennent sur certains points rencontrés auparavant. L'objectif est de retrouver des résultats qui avaient été admis dans un premier temps en les abordant sous l'angle de la simulation numérique.

Ce sujet est intéressant et varié mais trop long pour espérer le terminer dans le temps imparti. Les questions sont de difficultés très inégales. Devant un tel énoncé, il est judicieux de prendre un peu de temps pour identifier les parties les plus abordables.

INDICATIONS

- A.2 La puissance dépend de deux variables ; il faut la maximiser par rapport à chacune.
- A.3 On peut différencier une bobine d'un condensateur en étudiant les signes des parties imaginaires de leurs impédances.
- B.2 Dériver chacune des équations précédentes par rapport à une même variable et permuter les dérivées.
- B.4 Réinjecter les formes proposées dans les équations (1) et (2).
- B.5 Écrire le système obtenu à chaque extrémité. Exprimer $\underline{V}_{10}$ et $\underline{V}_{20}$ en fonction de $\underline{V}_s$ et $\underline{I}_s$.
- B.7 Poser $\underline{Z}_e = \underline{R}_a$. Transformer alors l'expression obtenue à la question précédente.
- C.3 Il s'agit d'établir l'équation de conservation de la charge.
- C.5 Mener une étude de symétrie au point M.
- C.6 Négliger dès que possible les termes en $1/r^2$.
- C.8 Il suffit de prendre la partie réelle du signal complexe.
- C.11 L'expression de la résistance de rayonnement ne dépend pas de constantes géométriques du problème mais seulement de constantes fondamentales.
- D.1 Utiliser les résultats de la partie A.
- D.3 Calculer la moyenne demandée grâce à la formule obtenue à la question C.10.
- D.7 Penser aux comportements équivalents des interrupteurs.
- F.6 Compter le nombre d'appels à la fonction `Rectangle1` précédente puis, à l'aide de la réponse à la question F.4, en déduire par une sommation le nombre total d'appels.
- G.2 Envisager la surface associée usuellement au calcul de la valeur moyenne du vecteur de Poynting : est-elle adaptée à un quadrillage volumique ?

Question préliminaire L'avantage majeur d'un TAG actif est qu'il peut communiquer tout seul avec l'extérieur et au moment de son choix, potentiellement, avec d'autres éléments que le seul émetteur-récepteur. De plus, on peut envisager que la distance de communication soit plus grande puisque l'on dispose de plus d'énergie.

Un système actif a aussi des inconvénients. Par exemple, la durée de vie limitée de la source d'énergie du TAG conduit à envisager un double fonctionnement lorsque la source s'est tarie ; la confidentialité d'une étiquette qui émettrait en continu serait aussi restreinte. On peut enfin supposer que de telles étiquettes sont plus encombrantes et coûtent plus cher.

A.1 En utilisant la notation complexe, la loi des mailles donne

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_G}{\underline{Z}_G + \underline{Z}_U}$$

Or, la puissance reçue par l'impédance $\underline{Z}_U$ est par définition

$$P_{Z_U} = \operatorname{Re}(\underline{Z}_U) |\underline{I}_{\text{eff}}|^2 = \operatorname{Re}(\underline{Z}_U) \frac{|\underline{I}_1|^2}{2}$$

soit

$$P_{Z_U} = \frac{R_U |\underline{E}_G|^2}{2 |(\underline{R}_U + \underline{R}_G) + j(\underline{X}_U + \underline{X}_G)|^2}$$

ou encore

$$P_{Z_U} = \frac{R_U |\underline{E}_G|^2}{2 [(R_U + R_G)^2 + (X_U + X_G)^2]}$$

Rappelons que, dans le cas d'un signal sinusoïdal, l'intensité efficace est reliée à l'intensité maximale par $I_{\text{eff}} = I_{\text{max}}/\sqrt{2}$.

A.2 On veut maximiser la puissance précédente par rapport aux variables R_U et X_U . On peut en premier lieu remarquer que, les deux variables étant indépendantes, la puissance est maximale à R_U fixée lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire pour $X_U = -X_G$ puisque toutes les autres grandeurs sont fixées. Dans cette situation, la puissance se simplifie en

$$P_{Z_U} = \frac{R_U |\underline{E}_G|^2}{2 (R_U + R_G)^2}$$

On dérive ensuite cette expression par rapport à R_U pour obtenir

$$\frac{dP_{Z_U}}{dR_U} = \frac{|\underline{E}_G|^2}{2} \frac{R_G - R_U}{(R_U + R_G)^3}$$

qui s'annule lorsque $R_U = R_G$. Finalement,

La puissance est maximisée lorsque $R_U + jX_U = R_G - jX_G$.

Une formulation plus classique de cette condition est $\underline{Z}_U = \underline{Z}_G^*$: l'impédance recherchée est l'impédance conjuguée de celle du générateur.

Sous cette condition, on a $\underline{I}_1 = \underline{E}_G/2R_G$ et après simplification,

$$P_{Z_U} = \frac{|\underline{E}_G|^2}{8R_G}$$

La puissance reçue par l'autre dipôle se calcule de la même façon puisque c'est la même intensité qui le traverse.

$$P_{Z_G} = \operatorname{Re}(\underline{Z}_G) \frac{|\underline{I}_1|^2}{2} = \frac{|\underline{E}_G|^2}{8R_G} = P_{Z_U}$$

On constate donc que la puissance se répartit à parts égales entre les deux dipôles. Par conservation de la puissance,

$$P_{E_G} = \frac{|\underline{E}_G|^2}{4R_G}$$

A.3 Le dipôle équivalent d'impédance $\underline{Z}_{IN}$ est directement influencé par les réactances proposées. En particulier, la mise en parallèle d'une impédance imaginaire pure jX_2 tend à diminuer la partie imaginaire de $\underline{Z}_U$ à cause des formules de mise en parallèle d'impédance (les inverses d'impédances s'ajoutent, ce qui conduit à des $1/j = -j$), alors que la mise en série de l'impédance imaginaire pure jX_1 tend à l'augmenter (en série, on ajoute les impédances). On peut donc, par un choix pertinent de ces deux réactances, espérer annuler la partie imaginaire de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{IN}$ et régler la partie réelle pour qu'elle soit égale à celle du générateur (l'ensemble de ces deux conditions correspond à l'adaptation en puissance).

Précisément, la figure fournie permet de déterminer deux couples de réactances conduisant à la fois à l'annulation de la partie imaginaire et à l'adaptation de la partie réelle. En effet, on place en abscisse et en ordonnée les valeurs de chacune des deux réactances. On trace alors deux droites horizontales qui sont les lieux des points où la partie résistive de l'impédance globale est égale à celle du générateur. Une troisième courbe, grosso modo verticale, donne les points qui conduisent à annuler la partie imaginaire. L'ensemble de ces deux conditions est nécessaire pour que l'adaptation de puissance soit réalisée. On trouve donc aux intersections les couples permettant cette dernière. Deux couples conviennent :

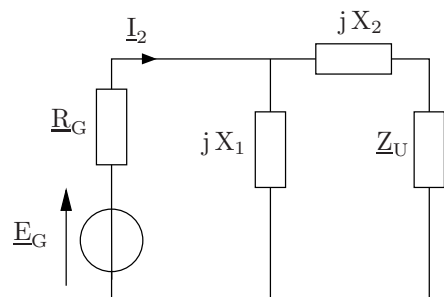
$$(X_1 = -50 \, \Omega ; X_2 = 250 \, \Omega) \quad \text{et} \quad (X_1 = 50 \, \Omega ; X_2 = -60 \, \Omega)$$

La nature d'une réactance dépend du signe de sa partie imaginaire. Si celle-ci est positive, l'impédance est de la forme $jL\omega$ qui est celle d'une bobine d'inductance L ; si elle est négative, l'impédance est de la forme $-j/C\omega = 1/jC\omega$ qui est celle d'un condensateur de capacité C . On accède à ω par la relation $\omega = 2\pi f$ et on connaît la fréquence de fonctionnement $f = 860 \text{ MHz}$. Par conséquent,

Le premier couple est l'association d'un condensateur de capacité $C_1 = 4 \text{ pF}$ et d'une bobine d'inductance $L_2 = 0,05 \, \mu\text{H}$.
Le second couple d'une bobine d'inductance $L_1 = 0,01 \text{ nH}$ et d'un condensateur de capacité $C_2 = 3 \text{ pF}$.

Ces capacités sont sensiblement équivalentes et de valeurs relativement courantes ; les inductances en revanche sont faibles. Il est par conséquent plus pertinent de prendre la plus grande des deux et de **retenir le premier couple de composants**.

A.4 Dans la première configuration, le premier composant est en parallèle et contribue à diminuer la partie réelle de $\underline{Z}_{IN}$; le second composant augmente celle-ci lors de la mise en série. Par symétrie, si l'on veut obtenir une adaptation d'impédance dans le cas où $R_G > R_U$, on peut proposer que le premier composant le plus proche avec la résistance $\underline{E}_G$ soit en série et le second en parallèle, comme sur le circuit ci-contre.



e3a Physique et Chimie PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Jean (ENS Ulm) et Claire Besson (Docteur en chimie) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE), Anna Venancio-Marques (ENS Lyon), Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) et Alexandre Hérault (Professeur en CPGE).

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants qui s'intéressent chacun à quelques aspects de la conversion d'énergie.

Le premier problème traite de l'optimisation de rendements thermodynamiques. Il comporte une partie de physique et une autre de chimie.

- La partie de physique concerne les machines thermiques et les phénomènes de résistance thermique. L'approche par un cycle ditherme réversible ne rendant pas correctement compte des rendements des centrales électriques, on affine le modèle en tenant compte de résistances thermiques entre la source chaude et le fluide. On calcule alors le rendement à puissance maximale, qui est à nouveau comparé aux rendements des diverses centrales thermiques.
- La partie de chimie traite du rendement thermodynamique des piles, en s'attachant spécifiquement au cas de la pile à combustible, fondée sur la réaction du dihydrogène et du dioxygène.

L'outil principal de cette étude est la thermodynamique chimique. À côté de plusieurs questions de cours concernant les définitions de diverses grandeurs thermodynamiques, on trouve un certain nombre de calculs classiques (énergies de liaison, application des premier et deuxième principes de la thermodynamique, calcul d'une température de flamme). Il est assez fréquent que les résultats d'une question soient réemployés par la suite, ce qui impose une résolution linéaire.

Notons la présence d'un grand nombre de questions incitant à une discussion relativement ouverte.

Le second problème, d'électrostatique, commence par une « résolution de problème » qui permet de mettre en regard l'énergie électrique de la foudre et l'énergie nécessaire à la propulsion d'un TGV. On modélise ensuite les réactions de fission nucléaire d'un point de vue électrostatique grâce au « modèle de la goutte liquide » : on considère que les noyaux sont des boules uniformément chargées en volume. Ce modèle permet d'estimer l'énergie libérée lors d'une réaction de fission.

Bien guidé, ce sujet n'est ni particulièrement difficile, ni très original. Seule la dernière sous-partie, consacrée à une approche électrostatique des réactions de fission nucléaire, peut dérouter puisque les réactions nucléaires ne sont étudiées qu'en terminale. Cependant en dehors d'une question « culturelle », aucune connaissance spécifique n'était requise.

INDICATIONS

Premier problème

- A.4 Ne pas oublier d'utiliser des températures en kelvins.
- B.5 Intégrer la loi de Fourier.
- C.1 Commencer par relier Q_c , J_q et Δt_c . Utiliser ensuite le résultat de la question I.B.6.
- C.3 Utiliser la question I.C.1, le premier principe et le second principe.
- C.4 Étudier la dérivée de la puissance moyenne P_m .
- D.4 Attention aux signes !
- D.5 Le seul travail est celui des forces de pression : $\delta W = -P_0 dV$.
- D.7 Décomposer le processus en deux étapes : réaction à température fixée puis échauffement des différents composants du milieu.
- E.5 Le travail total est maintenant la somme du travail électrique et du travail des forces de pression. L'application du deuxième principe donne une limite pour la valeur de la quantité de chaleur échangée.
- F.1 Le rendement thermodynamique d'une pile est défini par l'énoncé au début de la partie D, celui d'une machine ditherme fait l'objet de la question A.2.
- F.3 La réponse à la question E.4 est utile ici.
- F.4 Dans une pile de concentration, la même demi-équation électronique prend place aux deux pôles de la pile.

Second problème

- G.1 Assimiler l'ensemble constitué par le nuage et le sol à un condensateur plan.
- H.1 Les invariances de la distribution de charge sont les invariances d'une boule.
- H.3 Appliquer le théorème de Gauss.
- J.2 Utiliser la densité volumique de nucléons dans le noyau μ .
- J.4 Quels noyaux peuvent être concernés par une réaction de fusion ?

OPTIMISATION DE RENDEMENTS THERMODYNAMIQUES

RENDEMENT À PUISSANCE MAXIMALE

A.1 Le moteur fournit du travail à l'extérieur. Par conséquent,

$$W < 0$$

Par ailleurs, pour un moteur, le système reçoit un transfert thermique de la source chaude (combustion de l'essence) et en cède à la source froide (l'extérieur), d'où

$$Q_f \leq 0 \quad \text{et} \quad Q_c \geq 0$$

Dans un moteur ditherme, la source chaude apporte l'énergie thermique nécessaire au fonctionnement de la machine. La source froide permet d'évacuer le surplus de chaleur, ce sont des pertes thermiques.

A.2 Le rendement η de ce moteur est le rapport de l'énergie mécanique fournie à l'extérieur sur l'énergie thermique nécessaire, soit

$$\eta = \frac{-W}{Q_c}$$

Le rendement maximal $\eta_{\max}$ est obtenu pour un cycle **réversible** et s'écrit

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

A.3 Lors d'une transformation isotherme, l'équilibre thermique est toujours réalisé : **les transferts thermiques sont donc infiniment lents, ce qui implique une machine thermique de puissance nulle.**

En outre, pour que le fluide et le thermostat soient à la même température lors des phases isothermes, il faut que les transferts thermiques soient parfaits. En d'autres termes, **les parois de l'échangeur thermique entre le fluide et le thermostat doivent être parfaitement diathermanes** : elles ne doivent pas présenter de résistance thermique, ce qui n'est pas raisonnable industriellement. En effet, il est très difficile de concevoir une paroi qui présente à la fois une résistance thermique nulle (donc infiniment fine) et une bonne résistance mécanique.

A.4 Calculons le rendement maximal $\eta_{\max}$ de ces trois centrales électriques.

Centrale	T_f	T_c	η_{obs}	$\eta_{\max}$
charbon	298 K	838 K	0,36	0,64
nucléaire	298 K	573 K	0,3	0,48
géothermique	353 K	523 K	0,16	0,33

On constate que le rendement effectivement observé est près de deux fois inférieur au rendement maximal pour un cycle réversible. **De nombreuses sources d'irréversibilité sont présentes** dans ces installations industrielles : les transferts thermiques et les frottements mécaniques notamment.

Par ailleurs, **le rendement maximal est atteint à puissance nulle** ce qui est en contradiction avec l'objectif d'une centrale électrique.

B.1 La loi de Fourier est une relation de proportionnalité entre la densité de courant thermique et le gradient de température. Elle s'écrit

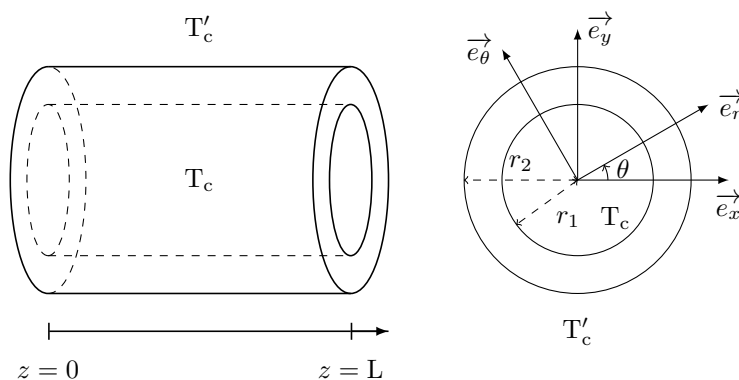
$$\vec{j}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T}$$

La température s'exprime en kelvins (K), la densité de courant thermique est une puissance par unité de surface, elle s'exprime en W.m^{-2} . On en déduit la dimension de la conductivité thermique :

$$[\lambda] = \frac{[\vec{j}_q]}{[\overrightarrow{\text{grad } T}]} = \frac{[\text{P}]\text{L}^{-2}}{\text{TL}^{-1}} = [\text{P}]\text{L}^{-1}\text{T}^{-1}$$

L'unité de la conductivité thermique λ est le $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. De plus, l'eau et le béton ont une conductivité thermique de 0,6 et 1 $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ respectivement.

B.2 On représente la canalisation dans le plan yOz et dans le plan xOy :



La longueur L du cylindre est grande devant les autres dimensions du problème, ce qui revient à considérer que les grandeurs physiques sont indépendantes de la coordonnée z. Par ailleurs, l'invariance par rotation d'angle θ de la géométrie cylindrique du problème permet d'établir que la distribution de température $T(r)$ est purement radiale. On montre ainsi que

$$\begin{aligned} \vec{j}_q(r, \theta, z) &= -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T(r)} \\ &= -\lambda \frac{dT(r)}{dr} \vec{e}_r \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{j}_q(r, \theta, z) = j_q(r) \vec{e}_r$$

CCP Physique et Chimie PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Christelle Serba (Docteur en chimie); il a été relu par Cyril Jean (ENS Ulm), Fabrice Maquère (Professeur agrégé), Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) et Alexandre Hérault (Professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de trois parties indépendantes. Les deux premières, de physique, portent sur l'orage et la foudre; la troisième, de chimie, traite de l'utilisation du nickel.

- La première partie, qui s'appuie essentiellement sur des notions d'hydrostatique et de mécanique, est consacrée à la formation des nuages orageux appelés cumulo-nimbus. On étudie les variations de température et de pression de l'atmosphère pour en déduire la condition pour qu'un nuage se forme.
- La deuxième partie présente un modèle électrostatique de la foudre et de sa propagation dans une ligne électrique. On y étudie également les prises de terre d'un point de vue électrostatique. Elle repose sur les notions d'électrocinétique et d'électrostatique dans un conducteur.
- La troisième partie porte sur l'électrolyse d'une solution de nickel (II) dans le but de déposer une couche de nickel métallique sur une électrode de fer. Très courte, cette partie est très proche du cours et ses questions sont bien détaillées.

Ce problème est représentatif des épreuves proposées au concours CCP et constitue de ce fait un bon entraînement. Il traite des domaines différents du programme de première comme de seconde année. Il comporte notamment des questions ouvertes où l'initiative du candidat est valorisée.

INDICATIONS

Partie A

- 5.a Utiliser la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation différentielle.
- 5.b Une erreur relative maximale de 10 % est acceptable.
- 7.a Avec les données numériques de l'énoncé, tracer P_{sat} en fonction de la température pour les trois dernières valeurs puis extrapoler la courbe par une droite affine. Pour finir, évaluer avec la régression linéaire la pression de vapeur saturante à la température $T(500 \text{ m})$.
- 7.b La pression partielle en eau est reliée à la pression totale par

$$P_{\text{eau}} = x_{\text{eau}} P_{\text{tot}}$$

avec x_{eau} la fraction molaire de l'eau.

- 11 Avec la valeur numérique de τ , le régime permanent est très rapidement atteint. La vitesse peut alors être considérée comme constante.

Partie B

- 14.a Appliquer le théorème de Gauss sur une sphère de rayon r avec $R_1 < r < R_2$.
- 14.b Utiliser la relation $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV$.
- 16 Appliquer le résultat de la question 14.b avec $R_1 = R_t$ et $R_2 = R_t + 80 \text{ km}$ avec R_t le rayon terrestre.
- 19.a L'éclair est un phénomène lumineux : il provient de l'air qui s'enflamme suite au passage de la foudre.
- 21 Calculer l'énergie avec la relation $\mathcal{E} = UI\Delta t$.
- 24 Considérer que la température est uniforme lors du passage de l'éclair et qu'il n'y a pas d'échange thermique avec l'air.
- 29.a Le premier pied est au potentiel $V(D)$ et le second pied au potentiel $V(D + a)$. La loi d'Ohm peut s'écrire

$$V(D) - V(D + a) = R_{\text{th}} I_{\text{max}}$$

- 30.a La résistance élémentaire dR s'écrit

$$dR = \frac{\vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\iint \vec{j} \cdot d\vec{S}}$$

Partie C

- 37 Revenir sur l'hypothèse faite à la question 36. Est-elle valable ?
- 38.a Quelle réaction parasite peut se dérouler à la cathode ? Quelle réaction peut présenter un palier de diffusion ?
- 38.b Comment minimiser la réaction parasite ?

PHYSIQUE

ORAGE ET FOUDRE

A. FORMATION ET STABILITÉ DU NUAGE

1 L'air est composé d'environ 80 % de **diazote** et de 20 % de **dioxygène**, d'où

$$M_{\text{air}} = 0,8 M_{\text{N}_2} + 0,2 M_{\text{O}_2} = 28,8 \text{ g.mol}^{-1}$$

L'air est en réalité composé de 78 % de diazote, 21 % de dioxygène, 0,9 % d'argon et de gaz rares pour le reste.

2 Le principe fondamental de la dynamique, à l'équilibre, projeté sur l'axe (Ox) s'écrit

$$-P(x + dx, y, z) dy dz + P(x, y, z) dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = 0$$

Ainsi

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

De même sur (Oy),

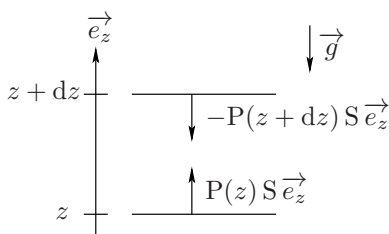
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

La pression ne dépend donc pas de x et y . Sur l'axe (Oz), on arrive à

$$0 = -P(z + dz) dx dy + P(z) S - \rho_{\text{air}} g dx dy dz$$

Le premier terme fait apparaître une dérivée par rapport à z . Il vient après simplification par $dx dy dz$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_{\text{air}} g$$



3 D'après la loi des gaz parfaits appliquée à l'air de température T_0 constante,

$$\rho_{\text{air}} = \frac{M_{\text{air}}}{RT_0} P(z)$$

Remplaçons cette expression dans celle de la question précédente,

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M_{\text{air}} g}{RT_0} P(z)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, ce qui donne avec $P(0) = P_0$,

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{air}} g z}{RT_0}\right)$$

4 D'après l'expression précédente, la pression décroît de façon exponentielle sur une distance caractéristique H telle que

$$H = \frac{RT_0}{M_{\text{air}}g}$$

Ainsi, l'atmosphère a une épaisseur L de l'ordre de $5H$, d'où

$$L = 44 \text{ km}$$

5.a De façon analogue au raisonnement de la question 3, il vient

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M_{\text{air}}g}{RT(z)} P(z) = -\frac{M_{\text{air}}g}{R} \times \frac{P(z)}{T_0 - \lambda z}$$

c'est-à-dire
$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_{\text{air}}g}{R} \times \frac{dz}{T_0 - \lambda z}$$

Intégrons cette relation entre $z = 0$ et z ,

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{M_{\text{air}}g}{\lambda R} [\ln(T_0 - \lambda z')]_0^z = \frac{M_{\text{air}}g}{\lambda R} \ln\left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)$$

Par conséquent,

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{M_{\text{air}}g/\lambda R}$$

Pour confirmer ce résultat, on peut faire quelques applications numériques : en ne conservant que trois chiffres significatifs, on retrouve exactement les valeurs proposées dans le tableau de la question suivante.

5.b Rajoutons les valeurs de P_{iso} dans le cas de l'atmosphère isotherme avec l'expression de la question 3, ainsi que l'erreur relative $\Delta P/P$,

Altitude (km)	0,5	2	5	8	11	14
P (hPa)	945	793	548	367	237	146
P_{iso} (hPa)	945	797	568	404	288	205
$\Delta P/P$	0%	0,5%	3,6%	10%	21%	40%

D'après les valeurs de $\Delta P/P$,

Le modèle de l'atmosphère isotherme est valable jusqu'à 8 km avec une précision relative maximale de 10%.

6 L'évolution étant adiabatique réversible, les lois de Laplace s'appliquent. La relation de la question 1 étant toujours valable, il vient

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{M_{\text{air}}g}{RT(z)} P(z)$$

7.a Calculons numériquement $T(z)$ à $z_1 = 500$ m,

$$T(z_1) = 295 \text{ K} = 22 \text{ }^\circ\text{C}$$

Faisons une interpolation linéaire entre $20 \text{ }^\circ\text{C}$ et $25 \text{ }^\circ\text{C}$ avec les valeurs données en fin d'énoncé. Avec $P_{\text{sat}}(20 \text{ }^\circ\text{C}) = 2340 \text{ Pa}$ et $P_{\text{sat}}(25 \text{ }^\circ\text{C}) = 3170 \text{ Pa}$, la courbe obtenue est de la forme

CCP Modélisation et Ingénierie numérique PSI 2015

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieurs); il a été relu par Guillaume Maimbourg (ENS Cachan) et Julien Dumont (Professeur en CPGE).

Ce sujet de modélisation et ingénierie numérique étudie un dispositif médical d'injection qui a pour but de remplacer les aiguilles traditionnelles afin de limiter les risques d'accident. On utilise à cette fin une membrane qui, en jouant sur les dépressions et surpressions qu'elle crée, module le débit injecté. Pour déformer cette membrane, on envisage l'utilisation d'effets thermiques et mécaniques.

- La première partie débute par l'identification des paramètres d'un système du premier ordre correspondant à l'actionneur thermique envisagé. Suivent des questions relativement classiques, préparant à la modélisation de la membrane, qui portent sur l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite.
- La modélisation mécanique de la membrane utilisée dans la micropompe a pour but de relier les efforts exercés sur celle-ci avec le débit de liquide injecté. Le modèle complet fait intervenir un grand nombre d'inconnues : il faut par conséquent utiliser des résolutions numériques, ce qui conduit à quelques questions d'informatique.
- La dernière partie propose un système d'asservissement du volume injecté, destiné à savoir si les exigences sont respectées. Dans un premier temps, un anémomètre à fil chaud servant de capteur de débit est détaillé dans des questions de diffusion thermique et d'électronique. Dans un second temps, on met en place l'asservissement proprement dit.

Le problème est équilibré entre sciences physiques, modélisation numérique, asservissements et mécanique du solide, respectant bien les attentes de l'épreuve. Les différentes parties sont indépendantes les unes des autres et toutes très abordables. Le sujet est plutôt court et faisable dans le temps imparti.

INDICATIONS

- 3 Écrire le débit volumique Q en fonction de la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ puis le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ en fonction du débit.
- 7 Exprimer le principe fondamental de la statique en exprimant tous les torseurs au point O_i .
- 9 Analyser le programme pas-à-pas, avec une matrice de taille 2×2 par exemple. Attention, si la première itération correspond bien à $i = 1$ dans la version Scilab, en revanche, elle est définie pour $i = 0$ en Python.
- 10 Attention aux notations : x_i et y_i sont des efforts, pas des déplacements.
- 11 La méthode d'Euler évalue une dérivée en calculant un taux d'accroissement.
- 14 La puissance P_{th} est perdue par le fil.
- 16 Utiliser les symétries et invariances du problème.
- 19 En régime permanent, la température ne dépend plus du temps. Reprendre l'équation obtenue à la question 14.
- 24 La relation entre la résistance et la température permet de conclure si l'on suppose que le pont reste équilibré.
- 26 Utiliser la relation fournie à la question 22.
- 27 Utiliser un diviseur de tension.
- 29 Tracer une droite et évaluer son coefficient directeur.
- 30 Le fil doit échanger de la chaleur uniquement avec le fluide, par convection.
- 32 Utiliser le théorème de la valeur finale.

1 La valeur asymptotique de la réponse d'un système du premier ordre à un échelon est égale au gain statique K_{th} multiplié par la hauteur u_{th} de l'échelon. On a donc, d'après la figure 5b,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{th} = K_{th} u_{th} = 60 \text{ N}$$

Le temps de réponse est obtenu lorsque la réponse atteint 63% de sa valeur finale, soit 38 N. Ainsi, on lit sur le graphique

$$K_{th} = 5 \text{ N.V}^{-1} \quad \text{et} \quad \tau_{th} = 2 \text{ ms}$$

L'équation différentielle d'un système du premier ordre est du type

$$f(t) + \tau_{th} \frac{df(t)}{dt} = K_{th} u(t)$$

soit
$$f(t) = (1 - e^{-t/\tau_{th}}) K_{th} U_{th} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} K_{th} U_{th}$$

On peut également retrouver le résultat en utilisant le théorème de la valeur finale : avec des conditions initiales nulles,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p F(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p H(p) U(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{K_{th}}{1 + \tau_{th} p} \frac{U_{th}}{p} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) &= K_{th} U_{th} \end{aligned}$$

2 Le théorème de Bernoulli suppose un écoulement **incompressible**, **homogène**, **permanent** et **parfait**. En notant Δh la perte de charge, qui correspond à la perte d'énergie mécanique entre l'entrée et la sortie, il s'écrit pour un canal horizontal

$$\frac{v^2(0)}{2g} + \frac{P(0)}{\rho g} = \frac{v^2(L)}{2g} + \frac{P(L)}{\rho g} + \Delta h$$

3 Le nombre de Reynolds est défini comme le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité. Il s'identifie avec le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection. Notons D le diamètre intérieur de l'aiguille, $\langle v \rangle$ la vitesse moyenne du fluide, de viscosité dynamique η et de masse volumique égale à celle de l'eau, $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Le nombre de Reynolds s'écrit

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\eta}$$

Avec $Q = \pi D^2 \langle v \rangle / 4$ le débit volumique du fluide, il devient

$$\mathcal{R}_e = \frac{4 \rho Q}{\pi \eta D} = 5 \cdot 10^2$$

L'écoulement est par conséquent laminaire.

Attention aux unités ! Dans une application numérique, il faut toujours utiliser celles du système international. Le débit vaut ainsi

$$Q = 5 \text{ mL.min}^{-1} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{60} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

- 4** Les pertes de charge régulières sont données par la relation de l'énoncé

$$\Delta h = \Lambda \frac{\Delta x}{2R} \frac{\langle v^2 \rangle}{2g}$$

Le terme $\langle v^2 \rangle$ représente la moyenne du carré de la vitesse, c'est-à-dire que

$$\langle v^2 \rangle \text{ est le carré de la vitesse quadratique moyenne.}$$

Ce terme peut être vu comme la vitesse efficace au carré. C'est une image de l'énergie cinétique moyenne.

$$\text{Le terme } \Delta x \text{ a la dimension d'une longueur.}$$

Il représente **la longueur de la canalisation**. En effet, les pertes de charge sont proportionnelles à la longueur de la conduite. Par conséquent, la perte de charge entre l'entrée et la sortie de l'aiguille vaut

$$\Delta h = \Lambda \frac{L}{2R} \frac{\langle v^2 \rangle}{2g}$$

Le paramètre de frottements pour un écoulement laminaire vaut $\Lambda = \frac{64}{\mathcal{R}_e}$.

- 5** Le débit volumique s'écrit

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = S \frac{1}{S} \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

La définition de la vitesse moyenne conduit à

$$Q = S \langle v \rangle$$

où $S = \pi R^2$ est la section droite de la conduite. Ainsi,

$$Q = \frac{P(0) - P(L)}{8\eta L} \pi R^4$$

- 6** En considérant que la pression en sortie d'aiguille est égale à la pression atmosphérique $P(L) = 1,0 \cdot 10^5$ Pa, on a

$$P(0) = \frac{8\eta L Q}{\pi R^4} + P(L) = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

- 7** Remarquons tout d'abord que lors d'un changement du point A au point B, la résultante $\vec{R}$ d'un torseur est inchangée et son moment $\vec{M}$ devient

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

Exprimons alors les torseurs des efforts exercés sur le segment i , réduits au point O_i :

- liaison pivot avec le segment $i - 1$:

$$\{\mathcal{T}_{i-1 \rightarrow i}\} = \left\{ \begin{array}{c} x_i \vec{x}_0 + y_i \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_i}$$

Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Fabrice Maquère (Professeur agrégé) ; il a été relu par Cyril Jean (ENS Ulm), Christelle Serba (Docteur en chimie), Alexandre Hérault (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet évoque différents aspects du projet Hyperloop. Il s'agit d'une proposition de transport terrestre à très haute vitesse dans des capsules propulsées par un moteur à induction, voyageant sur coussin d'air dans des tubes à pression réduite. Le sujet est constitué de trois parties dont chacune détaille une particularité du projet.

- La première partie s'intéresse aux propriétés thermodynamiques de l'air contenu dans les tubes de guidage. Elle commence par l'étude d'une pompe à palette, utilisée pour créer et maintenir un vide partiel dans le tube dans lequel circulent les capsules ; on modélise son fonctionnement par une série de transformations isothermes d'un gaz parfait, d'abord dans un modèle idéal puis en considérant l'existence de fuites. Dans un second temps, le sujet se penche sur le comportement de l'air au voisinage du véhicule. Enfin, la question du refroidissement de celui-ci au moyen d'un échangeur à deux fluides est abordée dans les dernières questions. Cette partie fait appel à une proportion assez large du programme de thermodynamique ; la difficulté des questions est progressive.
- La deuxième partie porte sur des thématiques liées à la chimie et s'intéresse à l'alimentation électrique du compresseur. Elle commence par l'étude de l'élément lithium (atomistique, cristallographie) puis se poursuit par des questions sur les deux électrodes utilisées dans un accumulateur au lithium (oxydoréduction, bilan énergétique d'une pile). À la fin de la partie est abordé le choix de l'électrolyte (détermination d'une enthalpie de réaction et de la conductivité de cet électrolyte). Cette partie est globalement facile.
- La troisième partie étudie le moteur à induction responsable de la propulsion des capsules. Le champ magnétique nécessaire au fonctionnement du moteur est produit par des paires de bobines, modélisées par des solénoïdes infinis. Le champ généré par ces bobines n'est exploitable pour la propulsion du véhicule que s'il forme globalement une onde progressive se propageant vers l'avant. On considère pour cela le champ produit par une succession de trois paires de bobines alimentées par du courant triphasé. Les dernières questions de cette partie sont relatives à la force de Laplace, subie par la capsule, qui découle de ce champ. Mêlant les chapitres sur l'induction et sur les ondes progressives, cette partie est d'un niveau plutôt basique mais une ou deux questions se révèlent assez calculatoires.

Ce sujet analyse un projet réel, dont on pourra trouver une description plus complète en suivant les références fournies en bas de page dans l'énoncé. La capacité à calculer des ordres de grandeur pour juger de la faisabilité d'une idée est une aptitude essentielle pour des ingénieurs et à ce titre, ce sujet est bien ciblé. Proposant par ailleurs des questions de difficulté variable, il est accessible à tout le monde.

INDICATIONS

Partie I

- I.A.1.a Appliquer l'équation des gaz parfaits au système composé du gaz dans le réservoir et dans la pompe.
- I.B.2 Reprendre le résultat de la question I.A.1.b et effectuer un développement limité.
- I.C.8.b La variation d'enthalpie de l'eau est la somme de deux termes décrivant des processus de nature différente.

Partie II

- II.A.5 Un élément de très faible électronégativité a tendance à ne pas retenir un de ses électrons.
- II.A.6 Pour calculer la compacité, il faut regarder où sont tangents les atomes entre eux et relier ainsi R_{Li} et a .
- II.A.8 Comparer la masse volumique du lithium à celle d'autres métaux usuels.
- II.B.1.a.ii Les nombres stœchiométriques dans une équation de réaction ne sont pas forcément des nombres entiers. Le nombre décimal x peut être utilisé.
- II.B.4.a 1 W.h est l'énergie fournie, pour une puissance de 1 W, pendant une heure.
- II.C.1.a Écrire les demi-équations électroniques en milieu acide puis ajuster l'équation finale pour qu'elle corresponde à un milieu basique.
- II.C.1.c Il faut s'intéresser à la thermodynamique de la réaction du lithium sur l'eau, ainsi qu'aux produits formés.
- II.C.2 Une estimation à un chiffre significatif de la conductivité de l'électrolyte suffit.

Partie III

- III.A.2.b Utiliser la première formule trigonométrique du formulaire à la fin du sujet.
- III.A.3 Développer chacun des produits de sinusoides, remarquer que la somme de trois des termes obtenus est nulle, puis regrouper les termes restants.
- III.B.1 Ne pas oublier que la spire est en mouvement.
- III.B.4 Considérer la valeur de la force de Laplace sur chacun des côtés de la spire carrée.
- III.B.6 Quel est le seul moyen pour orienter la force de Laplace dans l'autre sens ?

LE PROJET HYPERLOOP

I. L'AIR DANS LE TUBE

I.A.1.a Le réservoir à vider, de volume V_0 et de pression initiale P_0 , contient, d'après la loi des gaz parfaits, une quantité de matière de gaz n_0 donnée par

$$P_0 V_0 = n_0 R T$$

La pression que l'on cherche est celle du réservoir au moment où l'orifice d'aspiration se ferme. Or si l'on suppose que l'équilibre hydrostatique a le temps de s'établir pendant une rotation de la pompe, cette pression est aussi celle qui existe dans le volume constitué du réservoir et de la pompe pendant la phase d'aspiration. Comme il s'agit de la même quantité de matière de gaz et qu'on suppose une évolution isotherme, on peut aussi appliquer l'équation des gaz parfaits au volume constitué de l'union du réservoir et de la pompe, soit

$$P_1 (V_0 + V_b) = n_0 R T = P_0 V_0$$

d'où

$$P_1 = P_0 \frac{V_0}{V_0 + V_b}$$

I.A.1.b Pour le second cycle, les calculs sont identiques mais la pression initiale dans le réservoir est cette fois P_1 au lieu de P_0 . Il suffit donc de la remplacer dans le résultat de la question précédente :

$$P_2 = P_1 \frac{V_0}{V_0 + V_b} = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_b} \right)^2$$

Selon le même principe, on observe que pour tout $k \geq 1$,

$$P_k = P_{k-1} \frac{V_0}{V_0 + V_b}$$

d'où

$$P_k = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_b} \right)^k$$

I.A.1.c La pression dans le réservoir diminue d'un facteur constant $\frac{V_0}{V_0 + V_b} < 1$ à chaque cycle, **$P_{\min}$ est donc la limite de la suite géométrique P_k , soit 0.**

I.A.1.d Le volume d'air aspiré à la pression du réservoir pendant un cycle de la pompe est V_b , que l'on multiplie par ν , le nombre de cycles par seconde, pour obtenir le débit, d'où

$$D = \nu V_b$$

I.A.2.a La valeur du débit trouvée à la question précédente ne dépend que des caractéristiques de la pompe et pas de la pression du réservoir. La courbe représentant D en fonction de P devrait donc être une droite horizontale, ce que l'on observe à peu de choses près entre 2 mbar et 1 bar. À des pressions inférieures à 2 mbar, le débit volumique réel de la pompe s'effondre. Cela peut être expliqué en partie par le fait que V_b n'est jamais totalement vide, il contient donc du gaz résiduel à une faible pression qui est réintroduit dans le réservoir à chaque cycle. Ce processus devenant de moins en moins négligeable à mesure que la pression du réservoir diminue, le débit d'extraction est réduit en conséquence.

I.A.2.b Comme à la première question, on peut appliquer la loi des gaz parfaits à la quantité d'air contenue dans le réservoir à la fin du cycle précédent :

$$P_k V_0 = n_k RT$$

De l'air s'introduit dans le réservoir pendant la phase d'aspiration, soit

$$P_{k+1}(V_0 + V_b) = n_{k+1}RT$$

où $n_{k+1} = n_k + n_f$, n_f étant la quantité d'air introduite et obéissant à l'équation $P_0 V_f = n_f RT$. Par conséquent,

$$P_{k+1}(V_0 + V_b) = P_k V_0 + P_0 V_f$$

d'où
$$P_{k+1} = P_k \frac{V_0}{V_0 + V_b} + P_0 \frac{V_f}{V_0 + V_b}$$

Cette équation montre que la pompe ne produit qu'un vide partiel dans le réservoir, du fait du terme constant dans l'expression de la pression. Cela explique la chute du débit volumique d'aspiration que l'on observe lorsque la pression dans le réservoir diminue en-dessous d'un certain seuil.

I.A.2.c Sans chercher une expression explicite de P_k pour toutes les valeurs de k , on se contente d'une recherche de point fixe pour en déterminer la limite quand k tend vers l'infini :

$$P'_{\min} = P'_{\min} \frac{V_0}{V_0 + V_b} + P_0 \frac{V_f}{V_0 + V_b}$$

soit
$$P'_{\min} V_b = P_0 V_f$$

d'où

$$P'_{\min} = P_0 \frac{V_f}{V_b}$$

L'énoncé n'est pas très clair sur la manière dont l'air est réintroduit à l'intérieur du réservoir : selon le modèle de fuite que l'on choisit, on peut obtenir des résultats légèrement différents pour $P'_{\min}$. Par exemple, si l'on considère que le volume d'air qui fuit provient d'une cavité dans la pompe et s'ajoute alors à ceux du réservoir et de la pompe lors du cycle d'aspiration, alors $P'_{\min} = P_0 \frac{V_f}{V_b + V_f}$. Ces différences ne sont pas fondamentales et ne changent pas l'interprétation physique des résultats.

I.A.2.d Les causes potentielles de la réintroduction d'air dans le réservoir sont multiples : fuite dans le réservoir lui-même, mauvaise adhérence des palettes de la pompe au stator de celle-ci, ou encore existence d'une petite cavité d'air dans la pompe qui n'est pas balayée par les palettes, et qui a pour conséquence la présence d'une quantité d'air résiduelle.

I.A.2.e Soit P la pression du réservoir. Le volume d'air extrait lors d'un cycle est toujours V_b , mais ce débit est diminué par la quantité d'air qui fuit vers l'intérieur du réservoir, soit un volume V_f à la pression P_0 , ce qui correspond à un volume $V_f P_0 / P$ à la pression P . En fin de compte, le volume net extrait à chaque cycle est $V_b - V_f \frac{P_0}{P}$. Le débit volumique total est donc

$$D = \nu \left(V_b - V_f \frac{P_0}{P} \right)$$

Centrale Physique et Chimie 2 PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Jean (ENS Ulm) ; il a été relu par Jimmy Roussel (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Le problème étudie la mise au point automatique des objectifs d'appareils photographiques. Deux types de motorisation de ces systèmes d'autofocus sont étudiés en détail. Les trois parties sont indépendantes.

- La première partie, d'optique géométrique, présente une modélisation simplifiée d'un objectif photographique avec une lentille convergente. Elle présente les concepts de latitude de mise au point et de profondeur de champ, qui sont des outils centraux en photographie.
- La deuxième partie est centrée sur une motorisation à courant continu. On étudie le couplage électromécanique entre le rotor et le stator pour exprimer le couple moteur. On détermine ensuite la caractéristique du moteur et les lois d'évolution de la vitesse angulaire et de l'angle de rotation. On applique enfin ces résultats à un objectif Canon.
- La dernière partie présente un moteur à ultrasons, qui est utilisé dans certains objectifs Canon. Ce dispositif original est l'occasion de mettre en œuvre une partie du programme sur les ondes mécaniques. La partie commence par l'étude d'ondes acoustiques de flexion dans une barre rectiligne et dans un anneau où l'on discute des relations de dispersion et des conditions aux limites. La deuxième sous-partie est centrée sur la réalisation pratique d'un dispositif permettant d'exciter des ondes progressives dans un anneau piézoélectrique ; on utilise les relations obtenues pour déterminer les tensions électriques à appliquer au système afin de créer effectivement une onde progressive dans l'anneau. Un montage à amplificateur linéaire intégré est proposé pour générer ces tensions. La dernière sous-partie, de mécanique du solide, permet de déterminer les caractéristiques mécaniques d'un moteur dont le rotor est entraîné par l'onde de flexion progressive dans l'anneau piézoélectrique. On compare enfin l'efficacité énergétique du moteur à ultrasons et du moteur à courant continu.

C'est un sujet long et complet qui mobilise une large part des programmes de première et de deuxième année. La dernière partie est particulièrement originale et intéressante. Remarquons enfin que ce sujet de physique-chimie ne présente absolument aucune question de chimie !

INDICATIONS

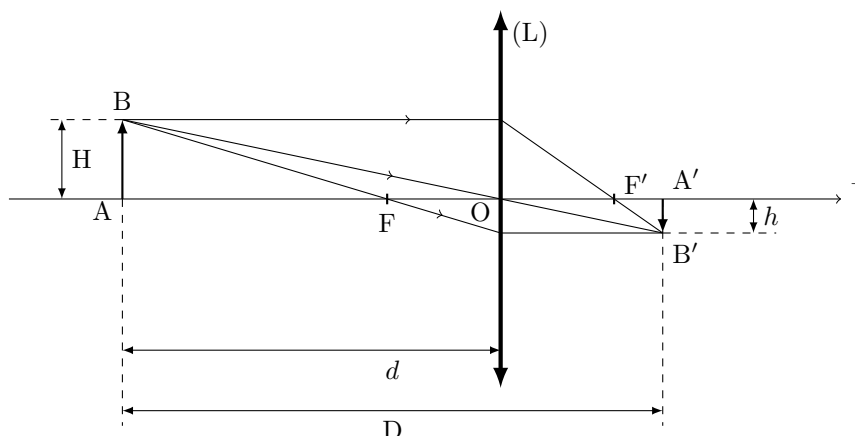
- I.A Faire un schéma. On connaît la taille de l'objet $\overline{AB}$ (l'individu) et la taille de l'image $\overline{A'B'}$ (la hauteur du capteur). On peut en déduire leurs positions d et D avec la formule du grandissement transversal $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB} = \overline{OA'}/\overline{OA}$ et en utilisant astucieusement le théorème de Thalès.
- I.B.2 Simplifier le problème en considérant que le plan objet est très éloigné et que le plan image est presque confondu avec le plan focal image.
- I.C Pour un portrait, on souhaite généralement une faible profondeur de champ pour que la personne photographiée soit le seul objet net de l'image.
- II.A.1 Calculer le moment magnétique d'une spire, puis le couple exercé par un champ magnétique stationnaire sur un moment magnétique.
- II.A.2 Séparer la moyenne sur un tour en une somme sur deux demi-tours, où le sens du courant est modifié.
- II.A.3 Calculer le moment magnétique moyen créé sur un tour par les spires du rotor. Quelle aimantation est induite dans un milieu ferromagnétique comme le noyau de fer doux ?
- II.A.5 Faire appel à la loi des mailles sur une spire.
- II.A.6 Utiliser le théorème du moment cinétique sur le rotor.
- II.B.1 Préférer les unités du système international pour éviter les erreurs.
- II.B.4 La puissance mécanique en régime permanent est la puissance calculée en $\Omega = \Omega_{\text{lim}}$.
- II.B.5 Comme t_{mp} est donné en ordre de grandeur, procéder par analyse dimensionnelle pour trouver un ordre de grandeur de θ_{mp} .
- III.A.1.b La propriété clef de la question III.A.1.a est « corde infiniment souple ». Qu'en est-il d'une barre solide ?
- III.A.1.f Quelles sont les conditions aux limites imposées par le système ?
- III.B.1.b Pour qu'une onde stationnaire existe dans l'anneau, il faut que les conditions aux limites périodiques et la relation de dispersion de la question III.A.1.f soient vérifiées en même temps.
- III.B.2.a Utiliser $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\cos(\theta - \pi/2) = \sin \theta$.
- III.B.2.b Quelle séparation spatiale permet d'obtenir le déphasage entre ψ_1 et ψ_2 démontré à la question III.B.2.a ?
- III.B.2.c Utiliser un pont diviseur de tension au niveau de la borne positive V_+ et au niveau de la borne négative V_- de l'ALI. Utiliser ensuite la relation que vérifie V_- et V_+ lorsque l'ALI est idéal et en régime linéaire.
- III.B.2.d Trouver comment modifier la superposition des ondes stationnaires $z_1(s, t)$ et $z_2(s, t)$ pour générer une onde progressive en sens opposé à l'onde progressive générée à la question III.B.2.a.
- III.C.2 Calculer le couple exercé par les N forces motrices de friction $\overrightarrow{R_T}$.
- III.C.3.a Appliquer le théorème du moment cinétique au rotor.
- III.C.3.b En plus du théorème du moment cinétique, il est nécessaire d'utiliser le théorème de la résultante dynamique. Pour les deux cas distingués, remarquer que la vitesse de rotation du rotor ne peut pas excéder ω_S .
- III.C.3.c La vitesse de rotation $\omega_R(t)$ à l'instant t_{mp} est nulle. Utiliser également le fait que θ_{mp} est l'aire sous la courbe $\omega_R(t)$ entre $t = 0$ et $t = t_{\text{mp}}$.
- III.C.4.a Comparer ω_R et ω_S en ordre de grandeur.

MOTORISATION ET MISE AU POINT AUTOFOCUS

I. LATITUDE DE MISE AU POINT ET PROFONDEUR DE CHAMP

I.A Pour l'étude de l'objectif, posons $h = 14,9$ mm et $\ell = 22,3$ mm respectivement la hauteur et la longueur de la matrice du capteur du boîtier de l'appareil photo ainsi que $H = 1,80$ m la hauteur de l'individu à photographier. On a

$$\begin{cases} \overline{OA} = -d \\ \overline{OA'} = D - d \\ \overline{A'B'} = -h \\ \overline{AB} = H \end{cases}$$



Représentons l'image de l'individu à photographier à travers la lentille mince convergente. Utilisons des rayons particuliers :

- le rayon passant par B et par le centre optique O émerge sans être dévié ;
- le rayon passant par B et par le foyer objet F émerge parallèlement à l'axe ;
- le rayon incident parallèle à l'axe et passant par B émerge en passant par le foyer image F'.

L'intersection B' de ces différents rayons est le point image de B. Le point image A' de A est le projeté orthogonal de B' sur l'axe optique. On utilise ensuite le grandissement transversal

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Or, d'après le théorème de Thalès,

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

On obtient

$$\frac{-h}{H} = \frac{f'}{f' - d}$$

et donc

$$d = f' \left(1 + \frac{H}{h} \right) = 6,09 \text{ m}$$

Mines Physique 1 PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cet énoncé présente deux méthodes de propulsion : la propulsion chimique, qui est utilisée par les fusées, et la propulsion par moteur ionique, utilisée pour les satellites et les sondes spatiales.

- La première partie étudie la force de poussée, indépendamment du mode de propulsion. Son expression est obtenue par la loi de la quantité de mouvement appliquée à un système ouvert. On justifie ensuite l'utilisation de fusées à deux étages, plutôt qu'un seul : cette configuration permet d'atteindre des vitesses plus élevées. On calcule enfin le rendement propulsif du moteur d'une fusée en utilisant des méthodes de calcul adaptées à l'étude des systèmes ouverts.
- C'est la propulsion chimique qui fait l'objet de la seconde partie. Après avoir écrit le premier principe de la thermodynamique en système ouvert, on évalue la vitesse maximale des gaz de propulsion.
- La troisième partie étudie le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique. On abandonne la physique des systèmes ouverts pour se concentrer, d'abord, sur le mouvement d'un électron d'un plasma froid, soumis à une onde électromagnétique. C'est l'occasion d'utiliser la force de Lorentz, mais aussi les équations de Maxwell. On en déduit les caractéristiques (puissance, consommation et force de poussée) du moteur ionique. On montre que l'utilisation d'une onde électromagnétique permet d'accélérer les électrons du plasma, mais limite sa densité.
- Dans la courte quatrième partie, on cherche à déterminer si le moteur ionique qui fait l'objet de la partie précédente permet le maintien d'un satellite sur son orbite. Cette partie fait appel au cours de mécanique sur les mouvements à force centrale.

Ce sujet, commun aux trois filières, fait appel aux programmes de première et de deuxième année. Le spectre des thèmes abordés n'est pas très large. Il contient peu de discussions physiques et d'analyses de données, mais fait appel à des méthodes de résolution particulières et à des points de cours. En ce sens, ce sujet constitue un bon problème de révision.

INDICATIONS

Partie I

- 1 On traite la fusée comme un système ouvert.
- 2 Le gaz qui est éjecté durant dt fait partie de la fusée à l'instant t .
- 8 La masse m_{c1} correspond à la propulsion chimique et m_{c2} à la propulsion ionique.
- 9 Dans le référentiel terrestre, la vitesse des gaz éjectés est $\vec{u} + \vec{v}$. Exprimer P_{jet} en fonction de D_m , v , u et dt . Utiliser l'expression de F obtenue à la question 3 pour obtenir P_F .
- 10 Faire appel à la formule $\eta = P_F / (P_{\text{jet}} + P_F)$.

Partie II

- 12 Les quantités W , W' et Q sont échangées pendant la durée élémentaire dt .
- 13 Ici, $\Delta(h + e_c) = 0$. Dans le cas d'un gaz parfait,

$$\Delta h = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} \Delta T$$

- 14 Le gaz éjecté est de la vapeur d'eau de masse molaire 18 g.mol^{-1} .

Partie III

- 15 La force de Lorentz magnétique peut être négligée. On le justifie en s'appuyant sur une des équations de Maxwell.
- 16 Écrire la loi de la quantité de mouvement. Se placer en régime sinusoïdal forcé.
- 17 Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss et la formule d'analyse vectorielle fournie.
- 18 Pour avoir propagation, il faut k réel. En déduire une propriété pour k^2 .
- 19 Montrer que $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \vec{v}_e \wedge B_0 \widehat{u}_z$.
- 20 Remarquer qu'une onde polarisée rectilignement est la somme de deux ondes polarisées circulairement. Repartir de l'expression de la vitesse obtenue à la question précédente et appliquer la méthode de variation de la constante.
- 21 On veut que l'onde se propage dans le milieu lorsque sa pulsation est ω_c ; il faut donc que $k^2(\omega_c) > 0$.
- 22 L'énergie d'un photon de pulsation ω est $\hbar\omega$.
- 23 Raisonner par analyse dimensionnelle.
- 24 Traduire la conservation de l'énergie mécanique pour exprimer v en fonction de V_a , puis l'expression de F en fonction de D_m et u .
- 26 Se contenter d'un ordre de grandeur pour évaluer P_{jet} . On peut, par exemple, utiliser la valeur de v fournie à la question 8.

Partie IV

- 30 Calculer la durée d'une révolution (à l'aide de l'analogie de la troisième loi de Kepler). Utiliser la valeur de P_{jet} estimée à la question 26.

ASPECTS DE LA PROPULSION SPATIALE

I. GÉNÉRALITÉS

1 Par définition, la quantité de mouvement $\vec{p}_f(t')$ de la fusée, à l'instant t' , est le produit de sa masse $m(t')$ à cet instant par sa vitesse $\vec{v}(t')$ au même instant, dans le référentiel d'étude. Ainsi, en prenant successivement $t' = t$, puis $t' = t + dt$, il vient

$$\vec{p}_f(t) = m(t) \vec{v}(t) \quad \text{et} \quad \vec{p}_f(t + dt) = m(t + dt) \vec{v}(t + dt)$$

La masse $D_m dt$ de gaz, éjectée entre les instants t et $t + dt$, possède une vitesse à l'instant $t + dt$ notée $\vec{u}$ par rapport à la fusée. La vitesse de la fusée par rapport au sol est $\vec{v}(t + dt)$. Par composition des vitesses, la vitesse du gaz éjecté par rapport au sol est $\vec{u} + \vec{v}(t + dt)$. Il s'ensuit que

$$\vec{p}_g = D_m dt \left[\vec{u} + \vec{v}(t + dt) \right] = D_m dt \left[v(t + dt) - u \right] \widehat{u_z}$$

L'énoncé est déroutant lorsqu'il demande de prendre « pour système la fusée à l'instant t » (ce qui laisse penser que la fusée est vue comme un système fermé), puis invite à la traiter comme un système ouvert. C'est bien cette seconde approche que l'on choisit.

2 Le système {fusée+gaz} est un système fermé entre t et $t + dt$. On peut donc lui appliquer la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La somme des forces extérieures à ce système se réduit à son poids $m \vec{g}$. Notons $\vec{\pi}(t)$ la quantité de mouvement de ce système à l'instant t , dans le référentiel d'étude, alors

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{\pi}(t + dt) - \vec{\pi}(t)}{dt} = m \vec{g} \quad (*)$$

Mais $\vec{\pi}(t) = \vec{p}_f(t) \quad \text{et} \quad \vec{\pi}(t + dt) = \vec{p}_f(t + dt) + \vec{p}_g$

Remplaçons les quantités de mouvement par leur expression établie précédemment,

$$\begin{aligned} \vec{\pi}(t + dt) - \vec{\pi}(t) &= \vec{p}_f(t + dt) - \vec{p}_f(t) + D_m dt \left[\vec{u} + \vec{v}(t + dt) \right] \\ &= m(t + dt) \vec{v}(t + dt) - m(t) \vec{v}(t) + D_m dt \left[\vec{u} + \vec{v}(t + dt) \right] \end{aligned}$$

Par conservation de la masse $m(t + dt) = m(t) + D_m dt$, il apparaît que

$$\vec{\pi}(t + dt) - \vec{\pi}(t) = m(t) \left[\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t) \right] + D_m dt \vec{u}$$

Injectons cette expression dans l'équation (*),

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u} = m \vec{g}$$

Projetons cette équation sur $\widehat{u_z}$ et utilisons $\vec{u} = -u \widehat{u_z}$,

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - m g \quad (1)$$

3 L'expression établie à la question précédente montre que la fusée est soumise à deux forces : l'une est son poids et l'autre correspond au terme $D_m u$, qui s'identifie à la poussée des gaz éjectés. Cette force est bien orientée vers le haut. Ainsi,

$$F = D_m u$$

Pour que la fusée décolle, il faut que l'accélération soit positive. On en déduit que

$$D_m u > m g$$

Puisque $m(t)$ est une fonction décroissante de t , cette condition peut aussi être réécrite en utilisant $m(0) = m_0$,

$$D_m u > m_0 g$$

4 L'impulsion spécifique I_s est la durée pendant laquelle m est éjectée, donc

$$D_m = \frac{m}{I_s}$$

car le débit est constant. La poussée est supposée égale au poids utilisé pour définir I_s , si bien que

$$D_m u = \frac{m}{I_s} u = m g \quad \text{d'où} \quad I_s = \frac{u}{g}$$

On doit s'assurer rapidement que I_s possède bien la dimension d'un temps :

$$[I_s] = \frac{L \cdot T^{-1}}{L \cdot T^{-2}} = T$$

5 Divisons l'équation (1) par $m(t)$ et séparons les variables,

$$dv = \frac{D_m u}{m(t)} dt - g dt$$

Comme

$$dm = -D_m dt$$

Il vient

$$dv = -\frac{dm u}{m} - g dt$$

Intégrons entre l'état initial en $t = 0$ et l'état à l'instant t :

$$v(t) - v(0) = u \ln \left[\frac{m_0}{m(t)} \right] - g(t - 0)$$

d'où

$$v(t) = u \ln \left[\frac{m_0}{m(t)} \right] - g t$$

On peut également résoudre cette question en s'appuyant plus explicitement sur la conservation de la masse : $m(t) + D_m t = m_0$. Cela conduit à intégrer l'équation suivante, qui conduit bien sûr au même résultat :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{D_m u}{m(t)} - g = \frac{D_m u}{m_0 - D_m t} - g$$

6 Adaptons le calcul de la question précédente. Cette fois, on prend $g \leftrightarrow 0$, $m_0 \leftrightarrow m_i$, $v(0) \leftrightarrow v_i$, $v(t) \leftrightarrow v_f$ et $m(t) \leftrightarrow m_f$. Ainsi,

$$v_f - v_i = u \ln \left[\frac{m_i}{m_f} \right] \quad \text{d'où} \quad \Delta V = u \ln \left[\frac{m_i}{m_f} \right]$$

Mines Physique 2 PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Maimbourg (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) et Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE).

Ce sujet comporte deux parties totalement indépendantes.

- La première partie, la plus longue, étudie le principe de fonctionnement d'une machine à liquéfier de l'azote. Elle est divisée en trois sous-parties. La première vise à dimensionner l'étage de compression de l'azote, constitué de plusieurs sous-ensembles compresseurs-réfrigérants en série. La deuxième étudie un diagramme enthalpique pour une transformation comportant un changement d'état liquide-vapeur. Quant à la troisième, elle a pour objectif de dimensionner l'échangeur thermique (E) à partir d'un raisonnement sur l'enthalpie. En particulier, le premier principe industriel est largement mis à profit dans cette étude.
- La seconde partie étudie par une approche mécanique une machine hydraulique : la roue-vanne de Sagebien. Cette partie est divisée en deux sous-parties. La première détermine le couple exercé par l'eau sur l'arbre de la roue en faisant le lien entre le débit et la vitesse de rotation de la roue, puis en explicitant la force exercée par l'eau sur les pales afin de déterminer le moment des forces. La dernière sous-partie permet enfin de comparer la puissance fournie par l'eau à la roue à celle effectivement disponible sur l'axe de rotation. Il est alors possible d'établir le rendement mécanique du système.

La première partie est d'une difficulté raisonnable sous réserve d'avoir bien assimilé le cours de thermodynamique. La seconde comporte des questions délicates pouvant conduire à des calculs lourds.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Utiliser la loi de Laplace pour déterminer la valeur maximale de r , après avoir précisé les conditions de son application.
- 2 La pression finale ne dépend que du rapport de compression et du nombre de compresseurs.
- 3 Appliquer le premier principe industriel entre les instants t et $t+dt$ aux deux sous-systèmes {diazote} puis {eau}. Exprimer la variation d'enthalpie dH du système en fonction des enthalpies et des débits massiques.
- 10 Utiliser le même raisonnement qu'à la question 3.
- 13 Appliquer le premier principe industriel à l'un des compresseurs.

Partie II

- 14 Écrire le volume passant dans la roue en fonction de ω et le comparer au volume entrant.
- 16 Utiliser l'équation d'Euler en la simplifiant pour un champ de vitesse constant et homogène. L'eau est supposée incompressible.
- 17 Pour le calcul de la résultante, comparer les pressions de part et d'autre de la pale. En ce qui concerne le calcul du moment des forces, noter que le point d'application de la résultante est au milieu de la pale. On pourra faire l'approximation des petits angles pour alléger les calculs.
- 20 Une puissance de 100 hp et une vitesse de 100 km.h^{-1} sont de bons ordres de grandeur.
- 22 Faire un bilan d'énergie en tenant compte du poids et de l'action de la roue. Que peut-on dire des forces de pression ?

MACHINES À ÉCOULEMENT PERMANENT

I. DIMENSIONNEMENT D'UNE INSTALLATION DE LIQUÉFACTION

1 Le diazote est assimilé à un gaz parfait diatomique. Aux températures usuelles, en notant R la constante des gaz parfaits, la capacité thermique à volume constant associée à une quantité de matière n de gaz s'écrit par conséquent

$$C_v = \frac{5}{2}nR$$

Pour un gaz parfait, l'énergie interne est associée aux nombres de degrés de liberté des molécules. Par ailleurs, le théorème d'équipartition de l'énergie, issu de la physique statistique, assure que chaque degré de liberté des particules contribue à raison de $RT/2$ à l'énergie cinétique molaire du gaz. Pour un gaz diatomique, aux températures usuelles, les degrés de liberté sont les translations du centre de masse de la molécule dans les trois directions de l'espace (trois degrés de liberté) et la rotation de la molécule autour de son centre de masse (deux degrés de liberté). Ainsi, cinq degrés de liberté contribuent à l'énergie interne molaire, d'où $U = 5/2nRT$.

De plus, d'après la relation de Mayer, pour un gaz parfait

$$C_P = C_V + nR = \frac{7}{2}nR$$

d'où

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Le compresseur réalise la compression adiabatique réversible d'un gaz parfait. Il est donc possible d'appliquer l'une des formes de la loi de Laplace. Ici, il convient de choisir celle faisant intervenir la température et la pression

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{\text{te}}$$

Il est évidemment inutile de connaître l'ensemble des formes de la loi de Laplace. La plus simple à mémoriser est probablement $PV^\gamma = C^{\text{te}}$. Il suffit alors d'utiliser l'équation d'état des gaz parfaits pour obtenir la forme nécessaire.

La température d'entrée du gaz est fixée à T_E et la température de sortie du diazote ne peut dépasser T_{max} , si bien que dans le cas limite, on obtient la valeur maximale du rapport de compression

$$r_{\text{max}} = \left(\frac{T_{\text{max}}}{T_E} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Par ailleurs, les étages de compression étant tous identiques,

$$p_A = r^N p_E$$

Utilisons alors la valeur limite r_{max} afin de calculer le nombre minimum d'étages de compression nécessaires N_{min} . En prenant le logarithme de l'expression précédente, il vient

$$N_{\text{min}} = \frac{\ln(P_A/P_E)}{\ln r_{\text{max}}} = \frac{(\gamma-1) \ln(P_A/P_E)}{\gamma \ln(T_{\text{max}}/T_E)} = 4,6$$

Le nombre N étant entier, choisissons donc l'entier immédiatement supérieur comme nombre minimal de compresseur, soit

$$\boxed{N = 5}$$

2 Le rapport de compression r étant maintenu constant, le même nombre d'étages de compression est nécessaire pour obtenir la compression finale p_A . Par conséquent,

Le nombre N de compresseurs est identique.

Si l'ajout d'irrégularités ne modifie pas le nombre d'étages de compression nécessaires, en revanche, la dimension du corps des cylindres des compresseurs est augmentée pour maintenir le même rapport r . Une puissance mécanique supérieure est donc nécessaire pour l'actionnement de chacun des compresseurs.

En pratique, la prise en compte d'irrégularités s'accompagne d'une augmentation plus élevée de la température lors de la compression. Il est alors nécessaire de diminuer r afin de vérifier la contrainte sur la température.

3 En se plaçant comme indiqué par l'énoncé dans le cas $N = 5$, le rapport de compression prend la valeur $r = (P_A/P_E)^{1/N}$. Calculons la température T_{sortie} du diazote en sortie de l'un des compresseurs. En utilisant la relation de Laplace, avec T_E la température d'entrée, il vient

$$T_{\text{sortie}} = r^{(\gamma-1)/\gamma} T_E = \left(\frac{P_A}{P_E} \right)^{(\gamma-1)/(N\gamma)} T_E$$

Appliquons le premier principe industriel aux systèmes constitués par chacun des deux fluides dans l'échangeur thermique. En toute généralité, le bilan s'écrit, pour des grandeurs massiques,

$$\Delta(h + e_{c,\text{macro}} + \rho g z) = w_m + q_m$$

Dans le cas présent, le système est isolé de l'extérieur. L'unique échange d'énergie est le transfert thermique d'un fluide vers l'autre. Par ailleurs, la variation d'énergie macroscopique est supposée négligeable : il n'y a ni variation de l'énergie cinétique, ni variation de l'énergie potentielle de pesanteur. Écrivons le bilan pour chacun des deux fluides :

$$\Delta h_{\text{azote}} = q_{\text{azote}} \quad \text{et} \quad \Delta h_{\text{eau}} = q_{\text{eau}}$$

Par ailleurs, pendant l'instant dt , les masses $\mathcal{D}dt$ de diazote et $\mathcal{D}_{\text{eau}}dt$ d'eau passent dans l'échangeur. Les équations précédentes se réécrivent alors, par extensivité,

$$\Delta h_{\text{azote}} \mathcal{D}dt = q_{\text{azote}} \mathcal{D}dt \quad \text{et} \quad \Delta h_{\text{eau}} \mathcal{D}_{\text{eau}}dt = q_{\text{eau}} \mathcal{D}_{\text{eau}}dt$$

L'échange thermique se faisant uniquement entre les deux fluides, il vient

$$q_{\text{eau}} \mathcal{D}_{\text{eau}}dt = -q_{\text{azote}} \mathcal{D}dt$$

Finalement, $\mathcal{D}_{\text{eau}} \Delta h_{\text{eau}} + \mathcal{D} \Delta h_{\text{azote}} = 0$

Mines Chimie PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Hérault (Professeur en CPGE); il a été relu par Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) et Fabrice Maquère (Professeur agrégé).

L'épreuve de chimie de la filière PSI au concours Mines-Ponts s'intéresse généralement à un élément chimique. Cette année le sujet aborde le lithium au cours de trois petites parties indépendantes.

- La première partie est très générale, la traditionnelle question sur le remplissage électronique commence le sujet puis l'on s'intéresse à la structure cristallographique du lithium ainsi qu'à quelques propriétés comme l'abondance relative des isotopes ou la réaction d'oxydoréduction avec l'eau. La dualité thermodynamique/cinétique est illustrée pour cette réaction que l'on doit interpréter en traçant l'allure des courbes courant-potentiel.
- La deuxième partie concerne le traitement du minerai naturel de lithium en vue de la production de lithium métallique par électrolyse, que l'on étudie dans la dernière partie. L'objectif est ici d'obtenir les ions lithium. On s'intéresse à la dissolution du minerai ainsi qu'à la précipitation des impuretés. Une étude thermodynamique de la dissolution du carbonate de lithium clôt cette partie.
- La troisième et dernière partie traite de l'électrolyse du chlorure de lithium. On établit classiquement les réactions aux électrodes et la tension minimale nécessaire en nuancant à l'aide des phénomènes de surtension. Pour finir, on calcule la consommation électrique lors du procédé.

La durée de l'épreuve est très courte mais le sujet de cette année peut être traité entièrement dans le temps imparti. Les thèmes abordés sont variés et les questions restent simples, dans l'esprit de l'enseignement de la chimie en filière PSI. Notons que l'énoncé est construit à l'aide de plusieurs documents issus d'un article sur la métallurgie du lithium. Il convient d'en retirer quelques données nécessaires à la résolution.

Comme toujours cette épreuve est un très bon entraînement pour les sessions futures car les sujets de chimie dans cette filière sont toujours construits de manière analogue et les thèmes sont récurrents.

INDICATIONS

- 1 Le numéro atomique du lithium s'obtient à l'aide de la notation ${}_3\text{Li}$.
- 2 L'énergie d'ionisation (notion hors programme) est l'énergie nécessaire pour arracher un électron à l'état gazeux. Le lithium est petit.
- 4 La masse molaire d'un isotope est voisine de son nombre de nucléons.
- 9 Si la thermodynamique est favorable mais que la réaction ne se fait pas, quel facteur entre en jeu ?
- 10 Faire apparaître une surtension pour la réduction de l'eau sur cathode de lithium.
- 11 L'acide sulfurique libère 2 protons. Pour 100 g de solution, il n'y a que 93 g d'acide sulfurique (la solution est à 93 % en masse).
- 12 Calculer la concentration en Al^{3+} dans les deux cas et appliquer la relation de Guldberg et Waage en présence de solide.
- 15 Utiliser l'évolution de la solubilité avec la température : on constate qu'elle est plus importante à froid.
- 17 Relier la solubilité s à la constante K_s et intégrer la relation de Van't Hoff entre 293 et 373 K.
- 18 Il y a toujours oxydation à l'anode et réduction à la cathode.
- 19 La cathode est reliée au pôle — lors d'une électrolyse.
- 21 On forme 2 fois moins de dichlore que de lithium et la masse molaire du dichlore est 10 fois plus importante.
- 22 Exprimer l'intensité du courant en fonction de la charge ayant circulé et de la durée. Par ailleurs, la réaction met en jeu un électron pour un atome de lithium.
- 23 Exprimer maintenant le travail électrique en fonction de la charge ayant circulé et de la tension d'électrolyse.

MÉTALLURGIE DU LITHIUM

1 Les trois règles de remplissage des électrons sont :

- **Règle de Klechkowski** : on remplit les sous-couches par ordre croissant de $n + \ell$, avec n croissant en cas d'égalité.
- **Règle de Hund** : lorsqu'une sous-couche est dégénérée, on place les électrons dans un maximum d'orbitales avec des spins parallèles.
- **Principe d'exclusion de Pauli** : deux électrons ne peuvent pas être décrits par le même quadruplet de nombres quantiques (n, ℓ, m_ℓ, m_s) .

La configuration électronique du lithium est

$$\boxed{\text{Li}(Z = 3) : 1s^2 2s^1}$$

Le lithium appartient à la première colonne de la classification périodique : c'est un **alcalin**.

| Le numéro atomique du lithium est $Z = 3$ comme le montre la notation ${}^6_3\text{Li}$.

2 Lors de l'ionisation d'un atome alcalin, l'électron arraché appartient à une sous-couche de type ns^1 (avec $n \geq 2$ car l'hydrogène n'est pas un alcalin). Pour le lithium, on a $n = 2$, l'électron arraché est alors le plus proche du noyau parmi tous les alcalins. L'attraction est donc la plus forte et l'énergie d'ionisation la plus élevée de la famille.

| L'énergie d'ionisation n'est plus au programme depuis l'entrée en vigueur de la réforme de 2013. On signale ici que, par définition, l'énergie d'ionisation est l'énergie à fournir pour arracher un électron à l'atome gazeux.

3 Le lithium est un **réducteur puissant** (son potentiel standard d'oxydoréduction est faible), il peut être utilisé dans la **fabrication de piles**.

4 La masse molaire d'un isotope est voisine de son nombre de nucléons, en grammes par mole, ce qui donne ici 6 et 7 $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ pour les deux isotopes du lithium. Comme la masse molaire vaut 6,951 $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, on déduit la composition

$$\boxed{95\% \text{ de } {}^7_3\text{Li} \quad \text{et} \quad 5\% \text{ de } {}^6_3\text{Li}}$$

| Le calcul est ici très simple, on peut donner le résultat directement. Pour le retrouver, on pose, en notant x la fraction molaire de ${}^7_3\text{Li}$,

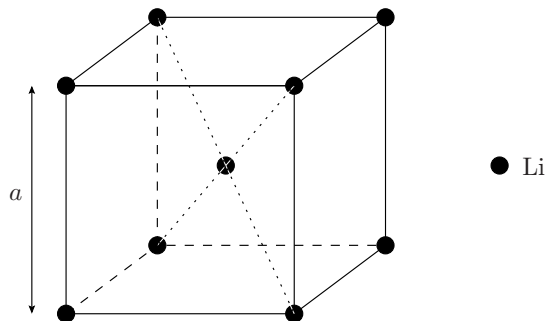
$$\mathcal{M} = 6,951 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} = 7x + 6(1 - x) = x + 6$$

d'où

$$x = 0,95$$

En réalité, l'abondance naturelle de ${}^7_3\text{Li}$ est de 92,5 %.

5 La maille cubique centrée du lithium est



Le nombre d'atomes de lithium dans cette maille est

$$Z = 8 \times \frac{1}{8} + 1 \times 1 = 2$$

La coordinence est le **nombre de premiers voisins** d'un atome dans la structure. Le lithium occupant un site cubique (les voisins sont aux 8 sommets),

$$\text{Li}|\text{Li} = [8]$$

6 Dans une structure cubique centrée, il y a contact sur la diagonale du cube :

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2R$$

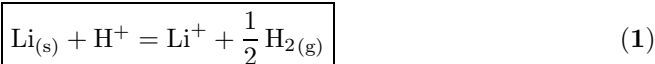
en notant a le paramètre de maille et R le rayon métallique d'un atome de lithium. Cela donne

$$a = \frac{4R}{\sqrt{3}} \approx 350 \text{ pm}$$

La calculatrice n'étant pas autorisée pour cette épreuve, voici comment l'application numérique peut se faire de tête :

$$a \approx \frac{4 \times 155}{7/4} = \frac{16 \times 155}{7} \approx 16 \times 22 = 352 \text{ pm} \approx 350 \text{ pm}$$

7 La réaction entre le lithium et l'eau est une réaction d'oxydoréduction. L'eau est réduite par le lithium en dihydrogène, le lithium est oxydé en cation lithium(I).



8 La constante d'équilibre de cette réaction est telle que

$$\ln K^\circ = \frac{n\mathcal{F}}{RT} (E^\circ_{\text{ox}} - E^\circ_{\text{red}})$$

La réaction échangeant un seul électron, on a $n = 1$. L'oxydant est H^+ , le réducteur est $\text{Li}_{(s)}$ et $RT \ln 10 / \mathcal{F} = 0,06 \text{ V}$ à 25°C . Il vient donc

$$\log K^\circ = \frac{1}{0,06} (0 + 3) = 50$$

d'où

$$K^\circ = 10^{50}$$

Comme $K^\circ \gg 1$, on s'attend à ce que la réaction soit quantitative.

9 Une réaction totale qui se fait peu est **cinétiquement bloquée**.