

Annales corrigées et commentées

Concours

2023 / 2024 / 2025

**MP MPI
PC**

Physique

**X
ENS
ESPCI**



Alexis Drouard



Physique (XULSR)

Filière MP - Session 2023

Durée : 4h00

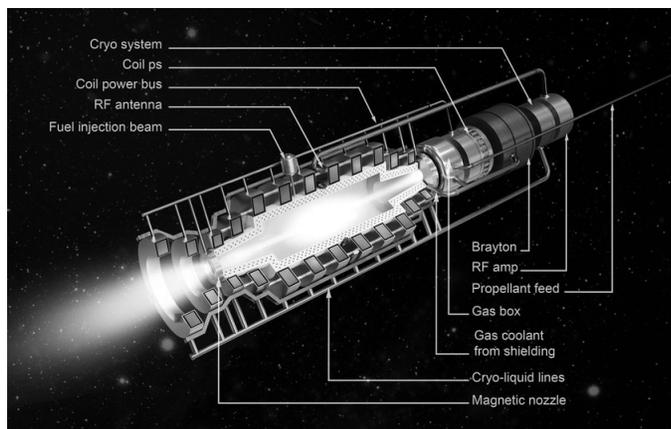
Calculatrices : non autorisées

Thématiques : physique quantique, physique statistique, thermodynamique

« L'épreuve de Physique série MP proposait [en 2023] deux problèmes totalement indépendants. Le premier s'appuyait sur la compétition entre effet tunnel et répulsion électromagnétique pour établir une loi d'échelle sur la cinétique de réactions de fusion nucléaire au sein du soleil; le second étudiait la puissance générée par un moteur en introduisant deux approches de thermodynamique en temps fini. Un grand nombre de copie a vu les deux problèmes traités jusqu'à la dernière question, avec seulement quelques questions laissées de côté. »

« La moyenne des 1702 candidats français [était] de 10,17/20 avec un écart-type de 3,87. »

Un sujet d'actualité. Si la fusion nucléaire est un sujet de recherche connu dans le secteur de l'énergie, notamment avec le projet ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), c'est aussi un sujet d'étude dans le secteur des technologies spatiales. L'utilisation de réacteurs à fusion pourrait permettre de réduire la durée des voyages spatiaux en accroissant les vitesses d'un facteur deux à trois. Pour réaliser ce projet, l'entreprise Pulsar Fusion construit une chambre de fusion de 9,8 mètres de long dont le but est de supporter des températures supérieures à celles régnant au cœur du Soleil lors de sa mise à feu (voir le schéma du prototype ci-après). Le défi majeur est la stabilisation des réactions au niveau de la chambre, c'est-à-dire retenir et confiner un plasma extrêmement chaud dans un champ électromagnétique. De la fusion thermonucléaire aux machines thermiques, il y a un sujet.



L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants. On se contentera de réponses courtes, sauf lorsque l'énoncé demande d'expliquer, d'interpréter, ou de commenter.

I – Fusion thermonucléaire au cœur du Soleil

L'énergie rayonnée par le Soleil est issue des réactions nucléaires de fusion qui se produisent en son centre. Leur étude est l'objet de cette partie.

1. Le Soleil est constitué en majorité d'hydrogène et d'hélium. L'intérieur du Soleil est si chaud que les atomes sont entièrement ionisés. Comment appelle-t-on cet état de la matière ?

2. La fusion nucléaire est un processus dans lequel deux noyaux légers se rapprochent suffisamment pour fusionner l'un avec l'autre. La répulsion électrostatique rendrait ce rapprochement impossible en l'absence d'un phénomène de physique quantique, qui leur permet de franchir la barrière de potentiel. De quel effet s'agit-il ?

3. Nous étudions d'abord le cas simple, à une dimension, de l'état stationnaire d'énergie E d'une particule quantique de masse m , qui rencontre une marche de potentiel. L'énergie potentielle vaut 0 pour $x < 0$ et V pour $x \geq 0$, avec $V > E$. On note $\psi(x)$ la partie spatiale de la fonction d'onde de la particule dans son état stationnaire. Déterminer l'expression de $\psi(x)/\psi(0)$ pour $x > 0$. On notera $t(E) = \psi(x)/\psi(0)$.

4. On considère maintenant une barrière de potentiel de hauteur V et de longueur L : l'énergie potentielle est nulle pour $x < 0$ et $x > L$, et vaut V pour $0 \leq x \leq L$, toujours avec $V > E$. On admet que si le coefficient de transmission de la barrière, qu'on notera $\Theta(E)$, est très faible, son expression est approximativement donnée par $\Theta(E) = |t(L)|^2$, où $t(x)$ est la fonction déterminée à la question précédente. Préciser, en fonction des données du problème, comment se traduit mathématiquement la condition $\Theta(E) \ll 1$. Rappeler la définition du coefficient de transmission pour ce processus. Expliquer, sans calcul, pourquoi l'expression proposée n'est qu'approximative.

On considère maintenant le cas où l'énergie potentielle $V(x)$ dépend de x de manière continue. On suppose qu'elle vérifie toujours $V(x) > E$ pour $0 \leq x \leq L$ et $V(x) < E$ pour $x < 0$ et pour $x > L$, de telle sorte que la barrière de potentiel a une longueur L . On admet que le coefficient de transmission s'obtient approximativement en effectuant, dans le résultat de la question précédente, la substitution suivante :

$$(V - E)^{1/2}L \longrightarrow \int_0^L (V(x) - E)^{1/2} dx. \quad (1)$$

5. Nous allons appliquer ce résultat au cas où x désigne la distance relative entre deux protons se déplaçant sur un même axe, et $V(x)$ l'énergie potentielle de leur interaction électrostatique. Rappeler l'expression de $V(x)$ et tracer l'allure de sa variation en fonction de x pour $x > 0$. On notera e la charge électrique élémentaire.

6. Les protons sont initialement à grande distance l'un de l'autre. E est l'énergie cinétique de leur mouvement relatif, dont nous déterminerons l'expression plus loin. La fusion nucléaire a lieu lorsque les protons se trouvent au même point, soit $x = 0$. Exprimer la longueur L de la barrière de potentiel qu'ils doivent franchir pour que la fusion ait lieu, en fonction de E et des constantes fondamentales.

7. Calculer le coefficient de transmission $\Theta(E)$ en le mettant sous la forme $\Theta(E) = \exp(-(E_G/E)^{1/2})$. On donne l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{u} - 1 \right)^{1/2} du = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Donner l'expression de E_G , dite énergie de Gamow, en fonction de la masse m de la particule et des constantes fondamentales.

8. Représenter la variation de $\Theta(E)$ en fonction de E .

9. On note v_1 et v_2 les vitesses des protons, en valeur algébrique, sur l'axe x . On note v_G la vitesse de leur barycentre et $v = v_1 - v_2$ leur vitesse relative. Exprimer la somme de leurs énergies cinétiques en fonction de v_G , v , et de la masse du proton m_p . Montrer que l'énergie cinétique E associée au mouvement relatif est l'énergie d'une particule fictive de masse μ dont on donnera l'expression en fonction de m_p .

On admet dans la suite que la masse m intervenant dans l'énergie de Gamow est en fait la masse μ qui vient d'être introduite.

10. Les deux protons considérés précédemment sont supposés appartenir à un gaz de protons que l'on modélise par un gaz parfait unidimensionnel à la température T . On note $P(v_1, v_2) dv_1 dv_2$ la probabilité élémentaire pour deux protons d'avoir des vitesses v_1 et v_2 à dv_1 et dv_2 près. Expliciter la dépendance de $P(v_1, v_2)$ en fonction de v_1 et v_2 . On ne cherchera pas à déterminer la constante de normalisation, et on notera k_B la constante de Boltzmann.

11. On note $P^*(v_G, v) dv_G dv$ la probabilité élémentaire que la vitesse du centre de masse soit v_G à dv_G près, et que la vitesse relative soit v à dv près. Montrer que $P^*(v_G, v)$ peut se mettre sous la forme $P_G(v_G)P^*(v)$. Expliciter les expressions de $P_G(v_G)$ et de $P^*(v)$ aux constantes de normalisation près. Commenter la forme de $P^*(v)$.

12. On note $p(E)dE$ la probabilité que l'énergie cinétique relative vaille E à dE près. Par un changement de variables de v à E , donner l'expression de $p(E)$ en fonction de E à une constante multiplicative près

13. On note $\Gamma(E)dE$ le nombre de réactions nucléaires de fusion par unité de temps, pour une énergie relative valant E à dE près. On postule que $\Gamma(E)$ est proportionnel à $v p(E) \Theta(E)$. Comment interprétez-vous cette modélisation ?

14. En utilisant les résultats obtenus précédemment, exprimer $\Gamma(E)$ en fonction de E . On écrira le résultat sous la forme $\Gamma(E) = K \exp(-\phi(E))$, où K ne dépend pas de E , et on exprimera $\phi(E)$ en fonction de E , E_G et $k_B T$.

15. Étudier la variation de $\phi(E)$. Montrer que $\Gamma(E)$ possède un maximum pour une valeur de E qu'on notera E_0 et qu'on exprimera en fonction de E_G et $k_B T$.

16. Situer l'énergie E_0 par rapport à E_G et $k_B T$ dans la limite où $E_G \gg k_B T$. Dans le cas de la fusion entre deux protons au cœur du Soleil, les valeurs numériques sont $E_G \simeq 500$ keV et $k_B T \simeq 1,5$ keV. Déterminer l'ordre de grandeur de E_0 .

17. Déterminer l'expression littérale de $\phi(E_0)$ en fonction de E_G et $k_B T$, puis calculer son ordre de grandeur avec les valeurs numériques données plus haut.

18. Tracer l'allure de $\Gamma(E)$. Quelle est la particularité de la variation de $\Gamma(E)$ avec E dans la limite où $E_G \gg k_B T$?

19. Généraliser les résultats obtenus au cas de la fusion de deux noyaux de numéros atomiques Z_1 et Z_2 , de masses m_1 et m_2 quelconques. Déterminer en particulier comment la valeur de μ et l'énergie de Gamow, E_G , sont modifiées.

20. Le taux d'une réaction nucléaire de fusion est défini comme le nombre de réactions de fusion par unité de volume et de temps, divisé par le produit des densités volumiques des deux noyaux impliqués dans le processus de fusion. Ainsi défini, le taux de réaction est indépendant des densités, et ne dépend que de la température. Une modélisation en trois dimensions, plus réaliste que celle développée jusqu'alors, donne un taux de réaction de la forme $a_i T^{-2/3} \exp(-(b_i/T)^{1/3})$, où a_i et b_i sont des constantes qui dépendent de la réaction de fusion étudiée. La table ci-après donne les valeurs de ces constantes pour diverses réactions. b_i et T sont en unités de 10^9 K (milliards de Kelvin), et les unités des coefficients a_i sont telles que les taux de réaction soient

en $\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{mol}^{-1}$. On désigne le proton par p , le neutron (dont la masse est très proche de celle du proton) par n . Les symboles D, ${}^3\text{He}$ et ${}^4\text{He}$ désignent les noyaux des atomes correspondants (D = deutérium = ${}^2\text{H}$), γ désigne le photon, e^+ le positon (électron chargé positivement) et ν_e le neutrino.

réaction	Valeur de a_i	Valeur de b_i (10^9K)
$p+p \rightarrow D+e^++\nu_e$	$a_1 = 4,08 \times 10^{-21}$	$b_1 = 38,65$
$p+D \rightarrow {}^3\text{He}+\gamma$	$a_2 = 1,81 \times 10^{-3}$	$b_2 = 51,52$
${}^3\text{He}+{}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He}+p+p$	$a_3 = 5,59 \times 10^4$	$b_3 = 1828$

Montrer que la modélisation développée précédemment permet de prédire certaines relations entre les quantités b_1 , b_2 et b_3 . Vérifier ces prédictions à l'aide d'applications numériques.

II – Rendement énergétique d'une machine thermique à sa puissance maximale

Lorsqu'une machine thermique cyclique fournit du travail en échangeant de la chaleur avec une source chaude et une source froide, de températures respectives T_1 et T_2 , le rendement maximal de Carnot n'est approché qu'à la limite des processus réversibles. Mais ceux-ci sont trop lents pour produire une puissance mécanique appréciable. À l'inverse, les processus très rapides sont fortement irréversibles, et leurs rendements sont si bas qu'on ne peut guère en extraire de travail mécanique. Un compromis est nécessaire si on souhaite rendre maximale la puissance de la machine. Nous allons étudier cette optimisation dans le cadre de deux modélisations simples, dont la première a été introduite indépendamment par les physiciens Jacques Yvon et I. I. Novikov au milieu des années 1950, dans le contexte de l'industrie électronucléaire naissante.

21. On note Q l'énergie fournie par la source chaude au cours d'un cycle de cette machine ditherme, et W le travail qu'on peut en extraire. Définir le rendement η d'une telle machine.

22. Déterminer l'expression du travail maximum W_{\max} qu'on peut extraire de la machine pendant un cycle en fonction de Q , T_1 et T_2 , et l'expression du rendement maximal correspondant, qu'on notera η_0 .

Premier modèle : transfert thermique

23. Nous considérons une machine dans laquelle l'énergie est produite par une source solide à la température T_1 . Cette énergie est transmise à un fluide caloporteur de température T_3 , avec $T_3 < T_1$, qui circule en contact avec la source solide. On suppose T_1 et T_3 uniformes et indépendantes du temps. On note Q l'énergie fournie par la source solide au fluide caloporteur pendant la durée τ d'un cycle. Donner l'expression de Q en fonction de τ , T_1 et T_3 et de la conductance thermique G_{th} de l'interface, supposée fixée.

24. Le fluide caloporteur constitue la source chaude d'une machine thermique ditherme dont la source froide est à la température T_2 . Il restitue à cette machine thermique l'énergie Q fournie par la source solide. On suppose par ailleurs que cette machine thermique fonctionne à son rendement maximal. En déduire la dépendance du travail W qu'elle fournit en fonction de τ , T_3 , T_1 , T_2 et G_{th} .

25. Tracer l'allure de la variation de la puissance extraite en fonction de T_3 pour T_1 et T_2 fixés.

26. Tracer l'allure de la variation du rendement η en fonction de T_3 pour T_1 et T_2 fixés. Que vaut la puissance extraite lorsque le rendement est maximal? Commenter ce résultat.

27. Déterminer la valeur de T_3 qui maximise la puissance extraite de la machine thermique pour T_1 et T_2 fixés. On exprimera cette valeur optimale de T_3 en fonction de T_1 et T_2 .

28. On note η_1 la valeur du rendement correspondant à cette valeur de T_3 . Exprimer η_1 en fonction de T_1 et T_2 .

29. Exprimer η_1 en fonction de η_0 , déterminé à la question 22, et représenter sa variation. Comment cette expression se simplifie-t-elle dans la limite où $\eta_0 \ll 1$?

Deuxième modèle : création d'entropie

30. On revient au cas général d'une machine thermique cyclique ditherme dont les sources chaude et froide ont les températures respectives T_1 et T_2 . On note toujours Q l'énergie fournie par la source chaude pendant la durée τ d'un cycle. On suppose maintenant qu'une entropie $S_c = \Sigma/\tau$ est créée au cours du cycle, où Σ est un coefficient indépendant de τ . Commenter cette modélisation. Quel est le signe de Σ ?

31. Déterminer le travail W fourni pendant un cycle en fonction de Q , T_1 , T_2 , Σ et τ .

32. Montrer que pour Q fixé, la puissance est maximale pour une valeur de τ qu'on déterminera, et qu'on notera τ_2 .

33. Calculer le rendement de la machine thermique lorsque la puissance est maximale. On le notera η_2 .

Discussion

34. Comparer les valeurs des rendements à puissance maximale prédites par ces deux modèles. Dans quelle limite ces prédictions coïncident-elles ? Cette limite correspond-elle à une irréversibilité forte ou faible ?

35. Dans le cadre du premier modèle, déterminer l'expression de l'entropie créée au cours d'un cycle en fonction de Q , G_{th} , τ et T_1 . Montrer qu'elle est proportionnelle à $1/\tau$ dans une limite qu'on précisera. Commenter ce résultat.

36. Le coût d'une centrale thermique provient d'une part du combustible produisant l'énergie, d'autre part de la construction de la centrale et de son fonctionnement. On considère une situation où l'un de ces deux coûts est très supérieur à l'autre. D'un point de vue économique, dans quel cas a-t-on intérêt à optimiser le rendement, et dans quel cas a-t-on intérêt à maximiser la puissance ?

37. Le réacteur Sizewell B est le plus grand réacteur nucléaire à eau pressurisée construit au Royaume-Uni, qui couvre environ 3% des besoins d'électricité du pays. Les températures des sources chaudes et froides pour ce réacteur sont $T_1 = 581$ K et $T_2 = 288$ K. Son rendement est $\eta = 0,36$. Commenter cette valeur à la lumière des résultats obtenus dans ce problème.

* * *

*

Corrigé

Partie I - Fusion thermonucléaire au cœur du Soleil

Le Soleil est une immense boule de gaz dont la masse correspond à 99,85% de la masse du système solaire. Cette boule de matière génère de tels pressions au centre que la température atteint 15 millions de degrés. Au delà de 7 millions de degrés débutent les réactions de fusion nucléaire, c'est pourquoi on parle dans les étoiles de fusion thermonucléaire.

1. L'état de la matière correspondant à un gaz ionisé est appelé **plasma**.

▷ L'ionisation consiste à fournir suffisamment d'énergie à un atome pour qu'un électron ne soit plus énergétiquement lié au noyau. Un échantillon de matière initialement solide utilisera de l'énergie reçue pour réaliser une transition de phase vers l'état liquide, puis gazeux et enfin éventuellement vers l'état plasma si l'ionisation est réalisable. Les conditions de pression et de température au sein du Soleil sont adaptées pour ioniser une partie des gaz d'hydrogène et d'hélium présents.

Conseils utiles

- ☑ Le rapport du jury mentionne que « le terme *plasma* n'est pas toujours connu ». Tout étudiant qui maîtrise les définitions abordées en cours compose avec un immense avantage sous forme d'un gain de temps (temps de réflexion raccourcie) et de points (réponse juste et prise de confiance en soi).
- ☑ La phrase-réponse peut ici être concise car la question est elle-même concise : seul le nom de l'état est demandé, rien d'autre. Une rédaction abondante serait chronophage, autant éventuellement y revenir à la fin de l'épreuve si la gestion du temps le permet.

2. Il s'agit de **l'effet tunnel**.

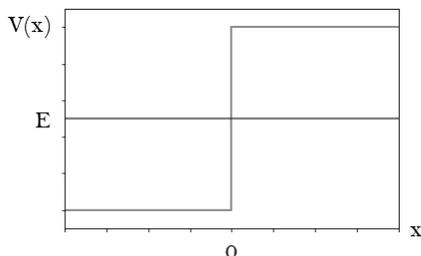
▷ Le franchissement d'une barrière de potentiel, impossible dans le cadre d'une description classique, peut se comprendre dans le cadre d'une description quantique. Le phénomène fut nommé "effet tunnel" par analogie avec une situation plus intuitive et classique : pour franchir un mur (barrière de potentiel) trop haut et trop solide (énergie inférieure à la barrière), la seule option est de creuser un tunnel dans la terre sur laquelle il repose.

Conseils utiles

- ☑ Le rapport du jury mentionne qu'une « *grande variété d'effets physiques hors de propos a été évoquée* ». Là encore, on constate que la maîtrise de toutes les définitions du programme (supposé être le minimum attendu !) est valorisante.
- ☑ La phrase-réponse peut comme précédemment être courte pour gagner du temps et éviter de perdre la confiance du correcteur pour une mauvaise explication.

3. La fonction d'onde $\Psi(x, t)$ d'un état stationnaire est de la forme $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$.

L'allure du potentiel $V(x)$ est représenté ci-après ainsi que l'état stationnaire d'énergie E .



Dans le domaine $x > 0$, la partie spatiale de l'état stationnaire vérifie l'équation de Schrödinger à une dimension :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2m(V-E)}{\hbar^2} \psi = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre à coefficient constant.

Discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta = \frac{8m(V-E)}{\hbar^2} > 0$.

L'équation admet donc deux racines réelles : $\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2} = \pm \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$.

Les solutions sont donc de la forme $\psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$ avec $k = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$.

On exploite les conditions aux limites :

- pas de divergence en $+\infty$, donc $B = 0$.
- continuité de la fonction d'onde en $x = 0$, donc $A = \psi(0)$.

Finalement, pour $x > 0$ on a $t(x) = \frac{\psi(x)}{\psi(0)} = e^{-kx}$.

▷ Déterminer une fonction d'onde signifie implicitement résoudre l'équation de Schrödinger. Les précisions de l'énoncé sur la forme des solutions (stationnaire) et le domaine de résolution ($x > 0$) confirment cette intuition.

▷ On comprend que $t(x)$ est l'analogue d'un coefficient de transmission pour la fonction d'onde (analogue car portant sur la fonction d'onde et non sur la densité de probabilité qui est le carré de la fonction d'onde).

Conseils utiles

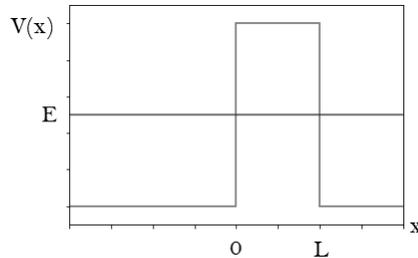
☑ Le rapport du jury précise que « de nombreux candidats ont aussi proposé une expression pour $x < 0$, générant parfois des erreurs superflues et faisant perdre du temps aux candidat.e.s ».

☑ Il précise également que « les notations de l'énoncé et non celles du cours doivent être utilisées » ; par exemple la partie spatiale de la fonction d'onde stationnaire est notée ψ et non φ .

4. D'après l'expression de $t(x)$ précédente : $\Theta(E) = |t(L)^2| = e^{-2kL}$.

Si $\Theta(E) \ll 1$ alors $kL \gg 1$, donc $L \gg \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V-E)}}$

L'allure du potentiel $V(x)$ est représenté ci-après :



De manière analogue à la question précédente, on montre que les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire unidimensionnelle sont :

$$\psi(x) = A_i e^{ikx} + A_r e^{-ikx} \text{ pour } x < 0 \text{ (amont de la barrière).}$$

$$\psi(x) = A e^{-kx} + B e^{kx} \text{ sur } L > x > 0 \text{ (dans la barrière).}$$

$$\psi(x) = A_t e^{ikx} \text{ sur } x > L \text{ (aval de la barrière).}$$

Par définition : $\Theta(E) = \frac{|A_t|^2}{|A_i|^2}$.

L'expression de $\Theta(E)$ proposée dans l'énoncé est approximative car elle ne considère pas la fonction d'onde existante dans la barrière : les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ donnent une relation plus complexe entre A_i et A_t .

▷ Cette question, qui en comporte trois, porte sur le coefficient de transmission. Il s'agit du rapport entre les densités de probabilité en aval et en amont de la barrière de potentiel. Si ce coefficient est très petit devant 1 c'est que rien ne franchit la barrière : autrement dit cette barrière est suffisamment épaisse pour se comporter comme une marche de potentiel.

Conseils utiles

☑ Il n'est pas utile de s'étendre sur les calculs des fonctions d'onde sur différents domaines si ceux-ci ont été menés correctement précédemment et qu'ils ne sont pas le cœur de la question (comme ici, mais ce n'est pas tout le temps le cas!). Précisez seulement de manière analogue à et donnez les solutions.

☑ Le rapport du jury mentionne que « ψ^2 a été écrit au lieu de $|\psi|^2$ ». La confusion entre fonction d'onde et densité de probabilité est une étourderie qui permet de facilement trier des candidats : ne la commettez pas.

☑ Le rapport du jury mentionne qu'« écrire $L \gg 1$ n'a pas de sens : il faut comparer des grandeurs de même dimension physique ». Plus l'équation est simple, plus le correcteur sera sensible aux problèmes d'homogénéité.

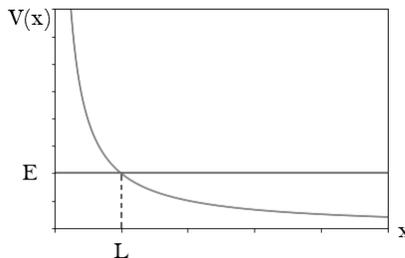
5. La force électrostatique entre les deux protons s'écrit $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x^2} \vec{e}_x$.

Il s'agit d'une force conservative associée au potentiel électrostatique V tel que $\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x$.

Par intégration, on obtient $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x}$

▷ Le potentiel mentionné est lié à l'interaction électrostatique entre des particules chargées, celui dont dérive la loi de Coulomb (une force conservative dérive d'un potentiel). Le sens de la force doit être vérifiée soigneusement afin de ne pas commettre d'erreur lors de l'intégration. La symétrie sphérique du problème permet de s'attendre à une valeur de potentiel décroissante en $1/x$ d'après la notation de l'énoncé.

L'allure du potentiel $V(x)$ est représenté ci-après :



Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne que des « erreurs de signe sont fréquentes » au niveau de l'expression du potentiel.

6. Au bord de la barrière on a $V(L) = E$ donc $L = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E}$

▷ Les deux protons fusionnant en $x = 0$, le proton incident doit franchir une barrière de potentiel $V(L)$ d'épaisseur L . Ce proton n'est pas contraint tant que $E > V(x)$ (aucune barrière n'est présente) mais le devient dès que $E < V(x)$ (une barrière est présente). Autrement dit l'épaisseur L de la barrière à franchir vérifie $V(L) = E$.

7. On sait que $k = \frac{\sqrt{2m} \int_0^L (V(x) - E)^{1/2} dx}{\hbar}$, que $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x}$ et que $E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L}$.

On développe $\Theta(E) = e^{-2kx}$ en injectant les expressions précédentes.

$$\ln(\Theta(E)) = -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^L \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x} - E \right)^{1/2} dx.$$

$$\ln(\Theta(E)) = -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^L \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L} \right)^{1/2} dx$$

$$\ln(\Theta(E)) = -\frac{2\sqrt{2m}e}{\hbar\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \int_0^L \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{L} \right)^{1/2} dx$$

On réalise un changement de variable en posant $u = \frac{x}{L}$.

$$\ln(\Theta(E)) = -\frac{2\sqrt{2me}}{\hbar\sqrt{4\pi\epsilon_0L}}L \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - 1\right)^{1/2} du$$

$$\ln(\Theta(E)) = -\frac{\pi L\sqrt{2me}}{\hbar\sqrt{4\pi\epsilon_0L}} \quad (\text{formulaire de l'énoncé})$$

$$\ln(\Theta(E)) = -\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar}L\sqrt{E}$$

$$\ln(\Theta(E)) = -\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0E} \sqrt{E} = -\frac{\sqrt{2me^2}}{4\epsilon_0\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}}$$

Par identification avec la forme proposée $\ln(\Theta(E)) = -\frac{\sqrt{E_G}}{\sqrt{E}}$ on a $E_G = \frac{me^4}{8\hbar^2\epsilon_0^2}$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne qu'« il est inutile de redémontrer une formule donnée dans l'énoncé. Il convient de respecter les demandes de l'énoncé, notamment les variables en fonction desquelles le résultat doit être exprimé ». En physique il ne faut pas s'attendre à réaliser autre chose que du développement (substitution, factorisation, simplification) dans ce type de question.

☑ Lorsqu'une intégrale est donnée, réaliser un changement de variable est généralement la seule compétence mathématique (par opposition à calculatoire) attendue. L'erreur la plus classique est de ne pas modifier l'élément d'intégration. Ici on a $u = x/L$ donc $du = dx/L$ ou encore $dx = Ldu$.

☑ Prendre le temps de valider le résultat obtenu par analyse dimensionnelle est important pour identifier une erreur de calcul, se rassurer et montrer au correcteur que vous mettez en œuvre une démarche scientifique. Elle ne doit cependant pas vous être chronophage : soyez judicieux dans la priorisation des raisonnements à mener.

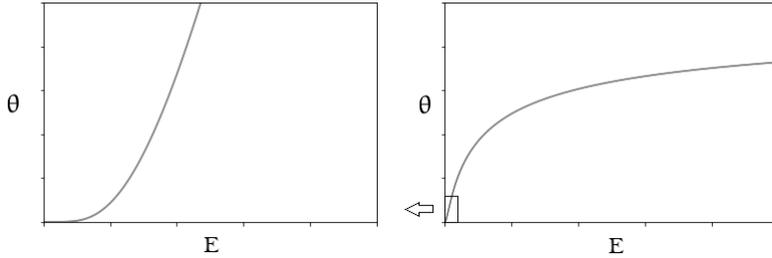
8. La fonction $f : E \mapsto \sqrt{\frac{E_G}{E}}$ est décroissante, donc $\theta(E)$ est croissante.

○ Si $E \ll E_G$ alors $\Theta(E) \ll 1$

○ Si $E \gg E_G$ alors $\Theta(E) \approx 1$

○ On a $\Theta(E_G) = \frac{1}{\exp(1)} = \frac{1}{e}$

L'allure de $\Theta(E)$ est représentée ci-après pour des valeurs proches de l'origine et éloignée, avec un agrandissement proche de l'origine pour mettre en évidence un point d'inflexion.



9. Les masses étant identiques, on a $v_G = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

Sachant que $v = v_1 - v_2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} v_1 &= v_G + \frac{v}{2} \\ v_2 &= v_G - \frac{v}{2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$E_c = \frac{1}{2}m_p v_1^2 + \frac{1}{2}m_p v_2^2 = m_p v_G^2 + m_p \frac{v^2}{4}$$

Dans le référentiel du centre de masse, on a $E = m_p \frac{v^2}{4}$ donc l'énergie liée au mouvement relatif est équivalente à l'énergie d'une particule fictive de masse $\mu = \frac{m_p}{2}$.

10. On utilise le facteur de Boltzmann : $P(v_1, v_2) = \frac{1}{2} e^{-\frac{m_p v_1^2}{2k_B T}} e^{-\frac{m_p v_2^2}{2k_B T}}$

11. On reconnaît dans $P(v_1, v_2)$ l'énergie cinétique totale $E_c = \frac{1}{2}m_p (v_1^2 + v_2^2) = m_p v_G^2 + m_p \frac{v^2}{4}$.

Déterminons le jacobien du changement de variable (v_1, v_2) vers (v_G, v) :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v_G}{\partial v_1} = \frac{1}{2} & \frac{\partial v_G}{\partial v_2} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial v}{\partial v_1} = 1 & \frac{\partial v}{\partial v_2} = -1 \end{vmatrix} \text{ donc } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Ainsi $dv_1 dv_2 = dv_G dv$ et donc $P^*(v_G, v) = P(v_1, v_2)$. Par conséquent :

$$p^*(v_G, v) = \frac{1}{2} e^{-\frac{m_p v_G^2}{k_B T}} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} = P_G(v_G) p^*(v)$$

L'égalité est valable aux constantes de normalisation près.

Pour $p^*(v)$ on reconnaît le facteur de Boltzmann pour la particule fictive de vitesse v et de masse $\mu = \frac{m_p}{2}$.

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que « le calcul du jacobien du changement de variable a été abordé dans un nombre très faible de copies ». Sans ce calcul, le changement de variable ne peut être justifié et le raisonnement devient caduque.

☑ Le rapport du jury mentionne qu'« l'expression du facteur de Boltzmann est inconnue d'une majorité de candidat ». Cela prouve une fois encore que des questions de cours peuvent être extrêmement classantes.

12. On a $p(E)dE = p(v)dv$ et $E = \frac{1}{2}\mu v^2$ donc $dE = \mu v dv$.

$$p(E) = p(v) \frac{dv}{dE} = K' e^{-\frac{E}{k_B T}} \frac{1}{\mu v} = \frac{K'}{\sqrt{2\mu E}} e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

13. La fonction $\Gamma(E)$ est proportionnelle au nombre de particules d'énergie E qui peuvent se rencontrer au même point, donc $\Gamma(E) \propto p(E)$ et $\Gamma(E) \propto \Theta(E)$ respectivement. Cela suppose une indépendance des collisions entre elles.

14. On a $p(E) \propto e^{-\frac{E}{k_B T}}$ donc :

$$\Gamma(E) = K e^{-\frac{E}{k_B T}} e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}} = K e^{-\Phi(E)} \quad \text{avec} \quad \Phi(E) = \frac{E}{k_B T} + \sqrt{\frac{E_G}{E}}$$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que « le préfacteur K ne dépendant pas de l'énergie E , il ne doit pas inclure de termes dépendant de la vitesse de la particule ». En effet, celle-ci intervient directement dans la contribution cinétique de l'énergie.

15. La fonction $\Gamma(E)$ maximale lorsque $\phi(E)$ est minimale.

On remarque que :

$\phi(E)$ est continue,

$\phi(E) \rightarrow +\infty$ lorsque $E \rightarrow 0$,

$\phi(E) \rightarrow +\infty$ lorsque $E \rightarrow +\infty$.

On en déduit que $\phi(E)$ admet un minimum qui est atteint en $E = E_0$.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dE}(E_0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{k_B T} + \sqrt{E_G} \left(-\frac{1}{2}\right) E_0^{-\frac{3}{2}} = 0 \\ E_0^{-\frac{3}{2}} &= \frac{2}{k_B T \sqrt{E_G}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$E_0 = \left(\frac{k_B T \sqrt{E_G}}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

16. Si $E_G \gg \frac{k_B T}{2}$ alors $\ln E_0 = \frac{1}{3} \ln(E_G) + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{k_B T}{2}\right)$.

Cela signifie qu'en échelle logarithmique E_0 est le barycentre de E_G et $\frac{k_B T}{2}$ de coefficients respectifs $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, autrement dit :

$$\frac{k_B T}{2} \ll E_0 \ll E_G$$

Application Numérique :

$$E_0 = \left(\frac{k_B T \sqrt{E_G}}{2} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1,5 \text{ keV} \times \sqrt{500 \text{ keV}}}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \simeq \left(\frac{1,5 \times 22}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ keV} \simeq (16,5)^{\frac{2}{3}} \text{ keV} \simeq 6,5 \text{ keV}$$

Conseils utiles

✓ Pour réaliser l'application numérique sans calculatrice, on pourra avoir recours à un encadrement approximatif : on a $16,5^2 = 273$ que l'on encadre avec $6^3 = 216$ et $7^3 = 350$.

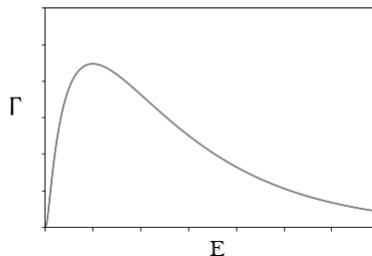
17. En injectant l'expression de E_0 obtenue question 15 dans celle de $\Phi(E)$ obtenue question 14, il vient :

$$\phi(E_0) = \frac{(k_B T)^{\frac{2}{3}} E_G^{\frac{1}{3}}}{k_B T 2^{\frac{2}{3}}} + \frac{E_G^{\frac{1}{2}}}{(k_B T)^{\frac{1}{3}} E_G^{\frac{1}{6}}} 2^{\frac{1}{3}} = \left(2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\frac{E_G}{k_B T} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Application Numérique :

$$\phi(E_0) \simeq \left(\frac{1}{4^{\frac{1}{3}}} + 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\frac{1000}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = 10 \times \left(\frac{1}{12} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = 10 \times \left(\frac{1}{2,2} + 0,9 \right) \sim 13$$

18. L'allure de $\Gamma(E)$ est représentée ci-après :



Dans la limite $E_G \gg k_B T$, les variations de $\Gamma(E)$ sont faibles. Ce résultat est cohérent avec le fait que $E > E_G$ est souhaitable pour pouvoir se rencontrer par effet tunnel bien que cela reste très peu probable en raison d'une agitation thermique insuffisante.

19. En considérant deux noyaux de masse m_1 et m_2 et en notant G leur barycentre, la conservation de la quantité de mouvement donne $(m_1 + m_2)v_G = m_1v_1 + m_2v_2$.

En introduisant, de manière analogue à la question 9, la vitesse $v = v_1 - v_2$, l'équation précédente devient :

$$(m_1 + m_2)v_G = m_1v_1 + m_2v_2 - m_2v$$

Ainsi, les vitesses de chaque atome s'expriment :

$$v_1 = v_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2}v \text{ et } v_2 = v_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2}v$$

On en déduit l'énergie cinétique totale :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 \left(v_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2}v \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(v_G - \frac{m_1}{m_2 + m_2}v \right)^2 = \frac{1}{2}(m_2 + m_2)v_G^2 + 0 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

avec $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ la nouvelle masse réduite.

On peut conjecturer que pour des noyaux de numéros atomiques Z_1 et Z_2 , le facteur $e^2 \times e^2 = e^4$ au numérateur de l'énergie E_G de la question 9 devient $(Z_1e)^2 \times (Z_2e)^2 = Z_1^2Z_2^2e^4$, donc :

$$E_G = \frac{\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \right) Z_1^2 Z_2^2 e^4}{8\hbar^2 \varepsilon_0^2}$$

Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne qu'il a été « *lu que la masse était proportionnelle au nombre de protons (au lieu du nombre de nucléons, on assimilait m_p et m_n)* ». On rappelle qu'un noyau de A nucléons à Z protons comporte AZ neutrons : il faut activer l'ensemble des connaissances et ne pas se limiter à réfléchir avec celles du domaine, sans quoi on commet des erreurs classantes comme celle-ci.

20. Dans le modèle étudié, le taux de création est proportionnel à $\Gamma(E_0)$.

En développant $\Gamma(E_0)$ on peut introduire une constante c tel que :

$$\Gamma(E_0) \propto \exp\left(-\left(c\frac{E_G}{T}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Par identification avec le modèle proposé on a $b = cE_G$. Vérifions la cohérence avec les données :

○ Pour les réactions 1 et 2 : $\frac{b_2}{b_1} = \frac{\left(\frac{m_p \times 2m_p}{3m_p}\right)}{\frac{m_p}{2}} = \frac{4}{3}$.

Vérification numérique : $\frac{4}{3}b_1 = 51,53 \simeq b_2$, résultat parfaitement cohérent.

○ Pour les réactions 2 et 3 : $\frac{b_3}{b_2} = \frac{3m_p}{2} \times 2^2 \times 2^2 = 48$

Vérification numérique : $48b_1 = 1845 \simeq b_3$, résultat parfaitement cohérent.

▷ La calculatrice n'étant pas autorisée, ces calculs doivent être réalisés en posant à la main les opérations.

Partie II - Rendement énergétique d'une machine thermique à sa puissance maximale

Les machines thermiques sont des convertisseurs d'énergie reposant sur un contact entre deux sources au minimum : les machines dithermes. Les différentes catégories de machines dithermes réalisables correspondent à des domaines dans le diagramme de Raveau, une représentation graphique du transfert thermique vers la source chaude en fonction de celui de vers la source froide.

21. Le rendement s'exprime $\eta = \frac{W}{Q}$

Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne que « les conventions de signe pour le travail W doivent être cohérentes au fil du raisonnement. Il vaut mieux choisir explicitement une convention et s'y tenir que de mettre des valeurs absolues pour éviter de se poser la question. ».

22. On étudie le système {fluide} sur un cycle :

○ le premier principe donne $0 = \Delta U = -W + Q + Q_f$.

○ le deuxième principe donne $0 = \Delta S = \frac{Q}{T_1} + \frac{Q_f}{T_2} + S_c$ avec $S_c \geq 0$.

En combinant les deux équations :

$$\frac{Q}{T_1} + \frac{(+W - Q)}{T_2} \leq 0 \Rightarrow Q \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + \frac{W}{T_2} \leq 0 \Rightarrow W \leq \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) Q = W_{\max}$$

On en déduit le rendement maximum :

$$\eta_0 = \frac{W_{\max}}{Q} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne que « l'invocation [à partir de rien] du rendement de Carnot ne permet naturellement pas aux candidats d'obtenir l'intégralité des points à cette question. ». La détermination du rendement de Carnot est bien ici une étape du raisonnement, pas un résultat de cours à admettre.

✓ Le rapport du jury mentionne que « très peu de candidat.e.s ont pris la peine de préciser les conventions d'orientation des flux d'énergie qu'ils utilisent. Certain.e.s candidat.e.s n'utilisent pas les notations de l'énoncé ». De la rigueur est très appréciée pour suivre un raisonnement, d'une part pour suivre la cohérence logique, mais d'autre part pour se démarquer des nombreux candidats qui la laissent de côté.

Premier modèle : transfert thermique

23. Le transfert thermique s'exprime :

$$Q = G_{\text{th}} (T_2 - T_3) \tau$$

24. D'après la question 22 on a $W = \left(\frac{T_3 - T_2}{T_3} \right) Q$.

En injectant le transfert thermique déterminé question précédente il vient :

$$W = G_{\text{th}} \frac{(T_2 - T_3)(T_3 - T_2)}{T_3} \tau$$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que ce « n'était pas judicieux de développer la formule pour pouvoir représenter la fonction dont les zéros sont évidents sous la forme factorisée. ».

25. La puissance s'exprime $P = \frac{W}{\tau} = G_{\text{th}} \frac{(T_1 - T_3)(T_3 - T_2)}{T_3}$.

On constate que $P(T_3)$ est une fonction positive qui s'annule en $T_3 = T_2$ et $T_3 = T_1$.

26. On constate que le rendement maximal est atteint en $T_3 = T_1$.

Remarquons que dans ce cas on a $P = 0$. Ce résultat est cohérent puisque si la source chaude et le fluide caloporteur sont à la même température alors le transfert thermique entre la source chaude et le fluide caloporteur est infiniment lent.

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que « faire tendre T_3 vers l'infini n'a pas de sens. Beaucoup de discussions sur le cas absurde de $T_3 > T_1$ ». Ces erreurs portent préjudice aux candidats qui les commettent, car elles traduisent une incompréhension physique de la situation. Il faut travailler ce point autant que les calculs eux-mêmes lorsqu'on travaille des annales de concours.

27. La puissance $P = G_{\text{th}} \left(-T_3 + (T_1 + T_2) - \frac{T_1 T_2}{T_3} \right)$.

Déterminons les extrema de $P(T_3)$:

$$\frac{dP}{dT_3} = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{T_1 T_2}{T_3^2} = 0 \text{ et donc } T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$$

28. En utilisant l'expression du rendement $\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_3}$, l'injection de la réponse précédente donne :

$$\eta_1 = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

29. On a obtenu question 22 le rendement $\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_2}$, qui se réécrit $\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta_0$.

Le rendement η_1 de la question précédente s'exprime alors :

$$\eta_1 = 1 - \sqrt{1 - \eta_0}$$

Par conséquent, si $\eta_0 \ll 1$ un développement limité à l'ordre 1 donne $\sqrt{1 - \eta_0} \simeq 1 - \frac{\eta_0}{2}$ et donc :

$$\eta_2 \simeq \frac{\eta_0}{2}$$

Deuxième modèle : création d'entropie

30. On a nécessairement $\Sigma > 0$ étant donné que $S_c > 0$.

On constate que si τ diminue, alors S_c augmente, autrement dit plus le transfert thermique est rapide plus la transformation est irréversible. Ce résultat est parfaitement cohérent.

Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne que « beaucoup [de candidat(e)s] pensent à tort que le modèle n'a pas de source de création d'entropie oubliant celle occasionnée par le transfert au sein du fluide caloporteur ».

31. On étudie le système {fluide}.

Le premier principe sur un cycle donne : $-W + Q + Q_f = 0$.

Le second principe sur un cycle donne : $0 = \frac{Q}{T_1} + \frac{Q_f}{T_2} + \frac{\Sigma}{\tau}$

La combinaison des deux équations donne $\frac{Q(T_2 - T_1)}{T_1 T_2} + \frac{W}{T_2} + \frac{\Sigma}{\tau} = 0$.

Finalement :

$$W = Q \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{\Sigma T_2}{\tau}$$

▷ On remarque que le résultat obtenu est cohérent car $W < W_{\max} = Q \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$.

32. La puissance s'exprime $P = \frac{W}{\tau} = \frac{W_{\max}}{\tau} - \frac{\Sigma T_2}{\tau^2}$.

Déterminons les extrema de $P(\tau)$:

$$\frac{dP}{d\tau} = -\frac{W_{\max}}{\tau^2} + \frac{2\Sigma T_2}{\tau^3} = 0 \quad \text{donc} \quad \tau_2 = \frac{2\Sigma T_2}{W_{\max}}$$

Finalement :

$$\tau_2 = \frac{2\Sigma T_2}{Q \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}$$

33. On a $W_2 = W(\tau_2) = \frac{1}{2}Q \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$ donc $\eta_2 = \frac{\eta_0}{2}$.

Discussion

34. Le tracé de $\eta_1(\eta_0)$ laisse supposer que $\eta_1 \geq \eta_2$, avec des valeurs d'autant plus proches que η_0 sera petit.

Vérifions cette conjecture :

$$\begin{aligned} \eta_1 = 1 - \sqrt{1 - \eta_0} > \frac{\eta_0}{2} &\Leftrightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{\eta_0}{2}\right)}_{\text{positif}} > \sqrt{1 - \eta_0} \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\eta_0}{2}\right)^2 > 1 - \eta_0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\eta_0^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

Les prédictions coïncident donc si $\eta_0 \ll 1$, ce qui correspond à une irréversibilité faible.

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que « *le raisonnement : rendement faible implique forte irréversibilité a souvent été fait* ». Il n'y a pourtant aucun rapport entre ces deux concepts.

35. Dans le premier modèle, l'entropie créée S_c est entièrement due au transfert thermique entre le solide à la température T_1 et le fluide à la température T_3 .

$$Q = G_{\text{th}} (T_1 - T_3) \tau$$

Le système {source 1 + fluide + résistance thermique} subit une transformation adiabatique donc $\Delta S = S_c$.

Par linéarité :

$$S_c = \Delta S_1 + \Delta S_3 + \Delta S_{\text{résist. therm.}} = \frac{-Q}{T_1} + \frac{Q}{T_3} + 0$$

En développant :

$$S_c = \frac{Q(T_1 - T_3)}{T_1 T_3} = \frac{Q^2}{G_{th} T_1 T_3 \tau} = \frac{Q^2}{G_{th} T_1 \left(T_1 \tau - \frac{Q}{G_{th}}\right)} \quad \text{car } T_3 = T_1 - \frac{Q}{G_{th} \tau}.$$

Finalement :

$$S_c = \frac{Q^2}{G_{th} T_1^2 \left(\tau - \frac{Q}{G_{th} T_1}\right)}$$

On constate que $S_c \propto \frac{1}{\tau}$ si on se place dans la limite $\frac{Q}{G_{th} T_1} \ll \tau$, autrement dit si $T_1 - T_3 \ll T_1$. Cela est bien vérifié dans le cas d'une irréversibilité faible, cohérente avec $\eta_0 \ll 1$.

Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne qu'il « est primordial de définir le système et de se tenir à cette définition pour mener à bien la démonstration. En effet, de nombreux raisonnements erronés ont pour une origine des changements de définition de système en cours de démonstration ». On ne rappellera jamais assez que tout raisonnement s'appuie sur des hypothèses et que parmi elles le choix du système (on pourra par exemple penser aux raisonnements de bilans enthalpiques en calorimétrie).

36. Les coûts de production dépendent principalement du combustible et du fonctionnement :

○ si le coût est dominé par le coût du combustible, alors il est proportionnel à l'énergie produite. Dans ce cas il faut optimiser le rendement.

○ si le coût est dominé par le coût de fonctionnement, alors pour une production fixée il dépend de la durée. Dans ce cas il faut chercher à augmenter la puissance.

37. Application Numérique :

$$\eta_0 = 1 - \frac{288 \text{ K}}{581 \text{ K}} = \frac{293}{581} \simeq 0,50 > 0,36 = \eta$$

On a donc $\eta > \eta_1 \simeq 0,30$, ce qui signifie qu'une optimisation supplémentaire est requise.



Physique (X)

Filière MPI - Session 2023

Durée : 4h00

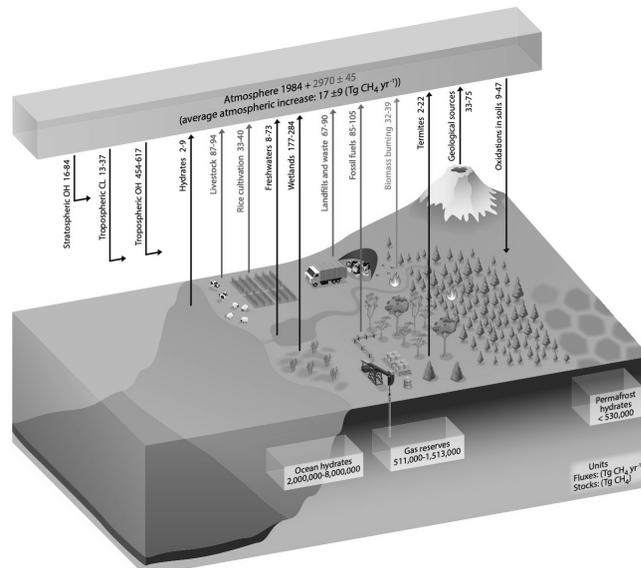
Calculatrices : non autorisées

Thématiques : mécanique, électromagnétisme, thermodynamique

« Le sujet proposait d'étudier l'influence de la teneur en molécules de CO_2 présente dans l'atmosphère terrestre sur le réchauffement climatique en modélisant de manière simple les mécanismes physiques mis en jeu dans ce processus. [Cela permettait] une mise en pratique des notions acquises en classes préparatoires et relatives à la mécanique du point et à la thermodynamique. Il se composait de trois parties distinctes de difficultés assez comparables et qui pouvaient être traitées indépendamment les unes des autres. »

« La moyenne des 246 candidats français [était] de 8,73/20 avec un écart-type de 4,01. »

Un sujet d'actualité. Joseph Fourier affirmait depuis 1824 que la température de la surface terrestre est augmentée par l'interposition de l'atmosphère, mais ce fut en 1860 que John Tyndall entreprit d'étudier les propriétés optiques et radiatives des gaz atmosphériques. Il identifia la vapeur d'eau comme principal composé responsable de l'effet de serre et conclut que toute variation de la quantité de vapeur d'eau devrait se traduire par un changement climatique. Il aboutit aux mêmes conclusions pour le dioxyde de carbone. En 1896, Svante Arrhenius donna à l'effet de serre son expression moderne, le situant dans le cadre géochimique du cycle du carbone (illustration ci-après, extraite du 5^{ème} rapport d'évaluation du GIEC, paru en 2014) tout en reliant la dérive à venir à l'utilisation industrielle des combustibles fossiles.



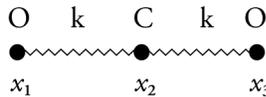
CO₂ et réchauffement climatique

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects physiques du réchauffement climatique qu'entraîne l'augmentation rapide, constatée au cours des dernières décennies, de la concentration de dioxyde de carbone dans l'atmosphère terrestre. La première partie étudie les vibrations de la molécule de CO₂. La deuxième se consacre à la modélisation de l'interaction du CO₂ avec une onde électromagnétique. La troisième partie discute l'impact de la présence de CO₂ sur la température de la Terre. Les trois parties peuvent en grande partie être traitées indépendamment.

On se contentera de réponses courtes, sauf lorsque l'énoncé demande de justifier un résultat.

I – Vibrations de la molécule de dioxyde de carbone

Une molécule est animée de mouvements de vibration, caractérisés par des oscillations des centres de masse des atomes autour de leur position d'équilibre. Nous étudions d'abord les vibrations longitudinales de la molécule de CO₂, dans lesquelles les centres de masse des trois atomes restent alignés à tout instant. On note m_O la masse de l'atome d'oxygène, m_C celle de l'atome de carbone, et $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ les déplacements des centres de masse des atomes par rapport à leurs positions d'équilibre respectives le long de l'axe de la molécule à l'instant t (voir figure ci-dessous).



1. Nous modélisons les oscillations en traitant chacun des atomes comme une masse ponctuelle, en décrivant la liaison entre un atome de carbone et un atome d'oxygène par un ressort de raideur k . Écrire les équations du mouvement.
2. Que peut-on dire du mouvement du centre de masse des trois atomes ?
3. Montrer qu'il existe une solution telle que $x_2(t) = 0$, $x_1(t)$ et $x_3(t)$ oscillant à la même pulsation. Déterminer cette pulsation, qu'on notera ω_s .
4. Montrer qu'il existe une solution telle que $x_1(t) = x_3(t)$, les trois masses oscillant à la même pulsation. Déterminer sa pulsation, qu'on notera ω_a .
5. Rappeler l'expression de la longueur d'onde λ d'une onde électromagnétique monochromatique plane de pulsation ω se propageant dans le vide à la vitesse c .
6. On ne mesure pas directement les pulsations ω_s et ω_a , mais les longueurs d'onde associées définies dans la question précédente. On les caractérise en général par le nombre d'onde spectroscopique, noté n , qui est l'inverse de la longueur d'onde, $n = 1/\lambda$, exprimé en cm^{-1} . Les valeurs de n associées à ω_s et ω_a sont $n_s = 1388 \text{ cm}^{-1}$ et $n_a = 2349 \text{ cm}^{-1}$. Si vous disposiez d'une calculatrice pour cette épreuve, quelle vérification numérique effectueriez-vous pour tester la validité de la modélisation faite ci-dessus ?
7. On suppose qu'il existe un troisième ressort de raideur k' reliant directement les deux atomes d'oxygène. Écrire l'expression de l'énergie mécanique du système.
8. Justifier que cette modélisation est la plus générale pour décrire les oscillations longitudinales de faible amplitude de la molécule de CO₂.
9. Déterminer les expressions de ω_s et ω_a , définies comme dans les questions 3 et 4, pour ce nouveau système. Quel est qualitativement l'effet du terme supplémentaire ?

Il existe, enfin, un troisième mode de vibration dans lequel l'atome de carbone se déplace perpendiculairement à la ligne formée par les deux atomes d'oxygène. La valeur de n correspon-

dante est $n_f = 667 \text{ cm}^{-1}$. Ce mode joue un rôle crucial dans l'effet de serre, comme on le verra plus bas dans la partie III.

II – Interaction avec une onde électromagnétique

Dans cette partie, nous étudions l'absorption du rayonnement électromagnétique par les molécules, qui est le principal mécanisme microscopique à l'origine du réchauffement climatique.

Approximation dipolaire

10. Une molécule est placée dans le champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique. Si sa longueur d'onde est beaucoup plus grande que la molécule, montrer que la résultante de la force exercée par le champ électrique sur l'ensemble de la molécule (électrons et noyaux) est, à tout instant, proportionnelle à la projection de son moment dipolaire sur le vecteur d'onde. On pourra prendre l'exemple d'une onde plane polarisée linéairement, développer la variation spatiale du champ électrique au premier ordre au voisinage d'un point quelconque de la molécule, choisi pour origine du système de coordonnées, et justifier ce développement.

11. Cette approximation est-elle vérifiée si la longueur d'onde appartient au spectre de la lumière visible ? Si elle appartient au domaine infrarouge ?

12. Que peut-on dire du moment dipolaire électrique de la molécule de CO_2 en l'absence de vibration ?

13. Parmi les trois modes de vibration définis dans la première partie, lesquels entraînent une variation du moment dipolaire de la molécule de CO_2 ? Qu'en est-il pour les vibrations des molécules N_2 et O_2 , qui composent l'essentiel de l'atmosphère ?

Oscillations forcées et absorption du rayonnement

Pour comprendre les oscillations d'une molécule placée dans le champ d'une onde électromagnétique, nous étudions le cas plus simple de l'oscillation d'un de ses composants, particule ponctuelle de charge électrique q en mouvement sur un axe x , soumise à un champ électrique $E \cos(\omega t)$, également dirigé suivant l'axe x .

14. Supposons que la particule effectue des oscillations forcées sous l'effet du champ. Le déplacement par rapport à sa position d'équilibre s'écrit alors $\underline{x}(t) = \underline{C}e^{i\omega t}$, où nous introduisons la représentation complexe $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$, et où \underline{C} désigne l'amplitude complexe du mouvement. Montrer que la puissance exercée par la force électrique sur la particule, moyennée sur une période, est proportionnelle à la partie imaginaire de \underline{C} , avec une constante de proportionnalité qu'on déterminera.

15. On note m la masse de la particule. On modélise sa dynamique par l'équation du mouvement

$$m(\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x) = F_e(t), \quad (1)$$

où $F_e(t)$ représente la force exercée par le champ électrique, dont on précisera l'expression. Commenter la signification physique de chacun de ses termes. Quel est le signe de α ?

16. Déterminer l'amplitude complexe \underline{C} du mouvement forcé. On écrira le champ électrique en représentation complexe sous la forme $E \cos(\omega t) = E \text{Re}(e^{i\omega t})$.

17. En utilisant le résultat de la question 14, déterminer l'expression de la puissance moyenne exercée par le champ sur la particule.

18. Comment peut-on déduire de ce résultat que l'onde électromagnétique perd de l'énergie en interagissant avec la particule, autrement dit, qu'elle est partiellement absorbée ?

19. À quelle condition sur le coefficient de frottement α peut-on dire que l'amortissement est faible ? Dans cette limite d'un amortissement faible, tracer le spectre d'absorption, c'est-à-dire la variation de la puissance moyenne absorbée avec la pulsation ω .

Effet des collisions entre molécules

Nous allons maintenant modéliser l'effet des collisions entre molécules, qui est crucial pour décrire l'absorption du rayonnement par l'atmosphère. Le physicien néerlandais Hendrik Lorentz (1853–1928) a été le premier à étudier ce phénomène dans son ouvrage intitulé “*The theory of electrons*”, paru en 1915, et nous retraçons son raisonnement.

20. On reprend le modèle dynamique défini par l'équation (1), dans laquelle on pose $\alpha = 0$. Chercher une solution $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$, avec $\underline{x}(t)$ fonction complexe de la forme

$$\underline{x}(t) = \underline{A}e^{i\omega t} + \underline{B}e^{i\omega_0 t} \quad (2)$$

où \underline{A} et \underline{B} sont des coefficients complexes, et déterminer la valeur de \underline{A} .

21. Lorentz suppose que lors d'une collision, le déplacement par rapport à l'équilibre est en moyenne remis à zéro. Déterminer les coefficients \underline{A} et \underline{B} tels que $\underline{x}(t - \theta) = 0$, où $\theta \geq 0$ représente le temps écoulé entre la dernière collision et l'instant t . Mettre la solution sous la forme $\underline{x}(t) = \underline{C}e^{i\omega t}$, et donner l'expression de \underline{C} .

22. Sous des conditions de température et de pression données, la probabilité pour qu'une molécule donnée entre en collision avec une autre molécule de l'atmosphère pendant un temps infinitésimal dt vaut dt/τ , où τ est un temps caractéristique de collision. On note $P(\theta)d\theta$ la probabilité d'avoir une valeur donnée de θ à $d\theta$ près. Justifier que $P(\theta) = (1/\tau)e^{-\theta/\tau}$, avec $\theta \geq 0$.

23. Moyenner le résultat de la question 21 sur θ avec cette loi de probabilité.

24. En utilisant le résultat de la question 14, calculer la puissance moyenne exercée par le champ sur la particule. Quel est son signe ?

25. Montrer que si τ est suffisamment grand et si ω est proche de ω_0 en valeur relative, alors l'expression de la puissance moyenne coïncide avec celle obtenue à la question 17, dans laquelle on remplace α par une fonction de τ qu'on précisera.

26. Quel terme manque-t-il, dans l'équation (2), pour obtenir une solution générale de la représentation complexe de l'équation (1) avec $\alpha = 0$?

27. Lorentz, dans son étude, résout cette équation en représentation complexe avec les conditions $\underline{x}(t - \theta) = 0$ et $\dot{\underline{x}}(t - \theta) = 0$. Effectuer cette résolution, et justifier que l'équation (2) représente une bonne approximation de la solution si ω est proche de ω_0 .

28. On admet que le raisonnement ci-dessus, fait pour une particule chargée ponctuelle, s'applique aussi à la molécule entière, où ω_0 est la pulsation d'un de ses modes de vibration. Expliquer qualitativement l'effet des collisions sur le spectre d'absorption de la molécule.

III – Effet de serre

29. La modélisation de l'effet de serre passe par celle de l'atmosphère terrestre. Nous traitons celle-ci, de manière simplifiée, comme un gaz parfait de masse molaire $M = 30 \text{ g mol}^{-1}$, dont la pression P et la température T ne dépendent que de l'altitude z . Nous faisons en outre l'approximation que le gradient de température vertical est constant, $dT(z)/dz = -\Gamma$, avec $\Gamma = 6 \text{ K km}^{-1}$. Le poids de l'atmosphère fait augmenter sa pression lorsque l'altitude diminue, et nous admettons que le gradient de pression, qui s'obtient en effectuant un bilan de forces, est donné par $dP(z)/dz = -MgN(z)$, où $N(z)$ est la concentration molaire à l'altitude z , et $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur. En éliminant z entre ces deux équations, montrer que la température est une fonction de la pression de la forme $T(z)/T(0) = (P(z)/P(0))^\beta$, où β est une constante dont on déterminera l'expression en fonction de Γ , M , g , et de la constante des gaz parfaits $R = 8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

30. Calculer la valeur numérique de β et représenter la variation de la température en fonction de la pression.

31. On note Φ la puissance surfacique moyenne reçue du Soleil par la Terre, dont une fraction α

est réfléchi vers l'espace. Quelle est la température T_E d'un corps noir qui rayonne une puissance surfacique identique à celle absorbée par la Terre ?

On note x la fraction molaire de CO_2 dans l'atmosphère, supposée uniforme et très faible, et $\mu(z)$ le nombre de moles de CO_2 par unité de surface horizontale au-delà de l'altitude z , obtenu en intégrant la densité volumique. On suppose pour simplifier que l'atmosphère au-delà de l'altitude z est opaque au rayonnement de corps noir si $\mu(z) > \mu_c$, et transparente si $\mu(z) < \mu_c$, où μ_c est un seuil qui ne dépend que des propriétés de la molécule de CO_2 . L'altitude h à laquelle le rayonnement de corps noir de température T_E est émis est alors déterminée par la condition $\mu(h) = \mu_c$, et la température T_E est celle de l'atmosphère à l'altitude h .

32. Exprimer $\mu(z)$ en fonction de $P(z)$, x , M et g . En déduire la pression $P(h)$ à l'altitude h .

33. Déterminer comment varie la température au sol en fonction de la fraction x de CO_2 dans l'atmosphère.

Dans ce qui précède, nous avons fait l'approximation implicite que le coefficient d'absorption du CO_2 ne dépend pas de la longueur d'onde. En réalité, comme on l'a vu dans les deux premières parties, cette hypothèse est fautive, ce que l'on constate sur la figure 1, où le CO_2 a une bande d'absorption centrée sur le mode n_f mentionné à la fin de la partie I.

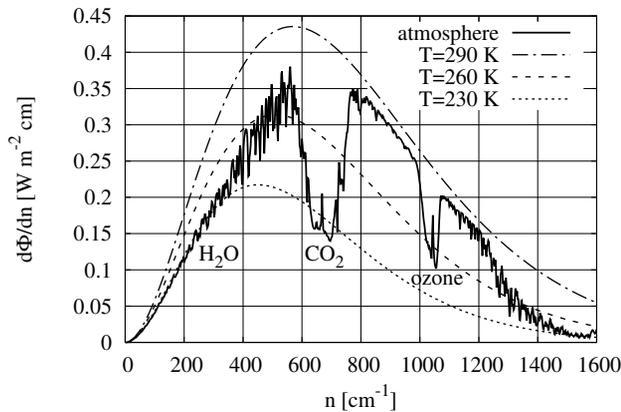


FIGURE 1 – Variation avec le nombre spectroscopique n de la puissance rayonnée par unité de surface et de n . Les lignes pointillées sont des spectres de corps noir à différentes températures. La ligne pleine est le spectre calculé du rayonnement émis de la Terre vers l'espace, tel que le flux total équilibre celui reçu du Soleil. Dans ce calcul, la température de la surface de la Terre est 288 K. L'atmosphère est transparente pour des valeurs de n comprises entre 800 et 1000 cm^{-1} . En revanche, dans d'autres intervalles de n , la vapeur d'eau, le CO_2 ou l'ozone absorbent la lumière émise par la surface. Dans ces intervalles, la lumière émise vers l'espace semble provenir d'une région atmosphérique plus froide, donc de plus haute altitude. [Le calcul a été réalisé au moyen du modèle MODTRAN <http://climatemodels.uchicago.edu/modtran/>.]

34. Quelle est la dépendance en température de l'aire sous un spectre de corps noir ?

35. Comment varie la position du maximum n_{max} du spectre de corps noir en fonction de T ?

36. À partir de la figure 1, estimer numériquement la puissance que la Terre rayonne vers l'espace par unité de surface.

37. En préservant l'équilibre avec le flux reçu du Soleil, comment est modifié le spectre émis par la Terre si on augmente la teneur de l'atmosphère en CO_2 ?

Corrigé

Partie I - Vibrations de la molécule de dioxyde de carbone

De même que le modèle de Bohr propose une modélisation classique de la dynamique d'un électron autour d'un noyau, un modèle élastique est une modélisation classique de la liaison chimique. Il s'agit bien ici d'un problème de mécanique qui ne prend en compte aucun élément de description chimique ou quantique des molécules.

1. Les seules forces en jeu entre les trois systèmes sont des forces de rappel élastiques. On applique le principe fondamental de la dynamique à chacun des atomes de la molécule :

$$\begin{cases} m_O \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \\ m_C \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2) \\ m_O \ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

Conseils utiles

- ☑ Le rapport du jury mentionne que « de nombreuses copies présentent des équations fausses du fait d'erreurs de signe sur l'orientation des différentes tensions mises en jeu dans le problème ou alors de la présence dans le système de termes faisant intervenir les longueurs à vide des différents ressorts ». Il est primordial, surtout en début de sujet, d'éviter ces erreurs.
- ☑ Sur ce type de concours, le temps de recherche peut être important : réaliser un bilan des forces exhaustif peut faire perdre un temps précieux, aussi faut-il opter pour une rédaction concise sur laquelle éventuellement revenir s'il reste du temps.

2. Le système { molécule de CO_2 } est isolé (les forces précédentes étant des forces internes pour ce système), il s'ensuit que le mouvement du centre de masse est une translation rectiligne uniforme.

▷ On peut également le justifier mathématiquement en sommant les trois équations du système, mais le point important est la justification physique qui repose sur l'uniformité du mouvement étudié.

3. En imposant $x_2(t) = 0$, le système devient :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_O} x_1 \\ x_1 = -x_3 \\ \ddot{x}_3 = -\frac{k}{m_O} x_3 \end{cases}$$

Les équations du mouvement sur x_1 et x_3 correspondent à celles d'oscillateurs harmoniques en opposition de phase et caractérisés par une même pulsation $\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m_O}}$.

4. En imposant $x_1(t) = x_3(t)$, le système devient :

$$\begin{cases} m_C \ddot{x}_2 = 2k(x_1 - x_2) \\ m_O \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

On fait l'hypothèse que les fonctions x_1 et x_2 se comportent comme des oscillateurs harmoniques de pulsation ω_a . En notation complexe, on a $x_1(t) = X_1 e^{j\omega_a t}$ et $x_2(t) = X_2 e^{j\omega_a t}$. Le système se réécrit

$$\begin{cases} \frac{2k}{m_C} X_1 + \left(\omega_a^2 - \frac{2k}{m_C} \right) X_2 = 0 \\ \left(\frac{k}{m_O} - \omega_a^2 \right) X_1 - \frac{k}{m_O} X_2 = 0 \end{cases}$$

Hormis la solution triviale $(X_1, X_2) = (0, 0)$, les pulsations solutions annulent le déterminant du système couplée.

En posant $\omega_1^2 = \frac{k}{m_O}$ et $\omega_2^2 = \frac{k}{m_C}$, cette condition s'exprime :

$$\omega_a^4 - (\omega_1^2 + 2\omega_2^2) \omega_a^2 = 0$$

Autrement dit,

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m_O} + \frac{2k}{m_C}}$$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne qu'il s'agissait d'une « *question discriminante car peu de candidat(e)s ont su résoudre le système d'équations différentielles couplées* ». Pourtant, il s'agit de situations extrêmement communes en physique, et donc sur ce type de concours. Il est important de s'entraîner, par exemple sur le cas simple de la détermination de la pulsation cyclotron.

5. Pour une onde progressive harmonique qui se propage à la vitesse c :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne « *beaucoup de mauvaises réponses* ». L'abus de langage consistant à assimiler fréquence et pulsation est malheureusement naturel puisque les grandeurs sont les mêmes à 2π près, mais les confondre dans ce calcul, même par maladresse, n'est pas acceptable.

6. On sait que $\omega \propto n = \frac{1}{\lambda}$. On peut donc comparer les rapports quadratiques des pulsations précédentes et des données fournies.

$$\text{D'une part } \frac{\omega_a^2}{\omega_s^2} = 1 + 2 \frac{m_0}{m_C} \approx 1 + 2 \frac{16}{12} = \frac{11}{3} \approx 3,7,$$

$$\text{d'autre part } \frac{n_a^2}{n_s^2} \approx 2,9.$$

Puisque $2,9 < 3,7$, la modélisation proposée apparaît insuffisante.

7. L'énergie mécanique du système {molécule de CO₂} s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}m_O(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_C\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k'(x_3 - x_1)^2$$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que « beaucoup de candidat(e)s comptent à tort deux fois l'énergie potentielle de chaque ressort car il(elle)s considèrent que cette énergie fait intervenir deux atomes ». Il est important de parfaitement maîtriser les notions de bases pour aborder ces concours : une énergie potentielle est associée à une interaction, donc intrinsèquement à deux systèmes.

8. Au voisinage d'une position d'équilibre stable, l'approximation harmonique est suffisante pour modéliser les interactions entre les trois atomes. Trois termes harmoniques sont donc suffisants.

9. En ajoutant la contribution du troisième ressort et en dérivant l'expression précédente de E par rapport aux trois variables, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} m_O\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + k'(x_3 - x_1) \\ m_C\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2) \\ m_O\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3) + k'(x_1 - x_3) \end{cases} \quad (5)$$

En imposant $x_2 = 0$, on retrouve $x_1 = -x_3$. De plus $\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_O}x_1 - 2\frac{k'}{m_O}x_1$, donc on identifie

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m_O}}$$

En imposant $x_1 = x_3$, on retombe sur le système de départ (résultat cohérent car le troisième ressort ne joue aucun rôle puisqu'il est toujours détendu) et on a donc ω_a inchangé.

Le troisième ressort modifie la pulsation propre du mode symétrique, sans affecter celle du mode antisymétrique.

▷ On retrouve une démarche similaire à celle attendue en question 4, basée sur l'établissement et la résolution d'un système d'équations couplées.

Partie II - Interaction avec une onde électromagnétique

L'interaction lumière-matière est un question aussi centrale que fondamentale en physique. Sa modélisation au sein des molécules repose sur celles des modèles de liaison chimique (la matière, réduite à un dipôle ici) et de rayonnement électromagnétique (la lumière, réduite à un champ électrique harmonique ici).

Approximation dipolaire

10. Considérons le champ électrique d'une onde électromagnétique plane harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} , polarisée linéairement selon l'axe (Ox) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$$

Notons respectivement \vec{R}_i et \vec{r}_j les rayons vecteurs des noyaux et des électrons. La composante électrique de la force de Lorentz qui s'exerce sur l'atome s'écrit :

$$\vec{F}_{L,E} = \sum_{i=\text{noyaux}} q_i \vec{E}(\vec{R}_i) + \sum_{j=\text{électrons}} -e \vec{E}(\vec{r}_j)$$

Le développement au premier ordre de la variation spatiale du champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{0}, t) + (\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} + \dots$$

On développe ainsi la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{L,E} = \sum_{i=\text{noyaux}} q_i \left(\vec{E}(\vec{0}, t) + (\vec{R}_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} \right) + \sum_{j=\text{électrons}} -e \left(\vec{E}(\vec{0}, t) + (\vec{r}_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} \right)$$

On manipule la somme par propriété de linéarité :

$$\vec{F}_{L,E} = \vec{E}(\vec{0}, t) \left(\underbrace{\sum_{i=\text{noyaux}} q_i + \sum_{j=\text{électrons}} -e}_{=0} \right) + \left(\underbrace{\sum_{i=\text{noyaux}} q_i \vec{R}_i + \sum_{j=\text{électrons}} -e \vec{r}_j}_{=\vec{P}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}$$

En identifiant le moment dipolaire \vec{P} , on obtient finalement :

$$\vec{F}_{L,E} = (\vec{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E(\vec{r}, t) \vec{e}_x = -i(\vec{k} \cdot \vec{P}) \vec{E}$$

La force est bien proportionnelle à la projection du moment dipolaire dans la direction du vecteur d'onde.

En notation complexe on a $\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = \vec{r} \cdot \vec{k} \propto \frac{2\pi r}{\lambda}$ or $\frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1$ d'après l'énoncé qui précise si la longueur d'onde est plus grande que la molécule.. Cette hypothèse justifie donc le développement.

11. Les dimensions typiques d'une molécule sont nanométriques, le rayonnement visible ($\lambda \sim 500 \text{ nm}$) et le rayonnement infrarouge ($\lambda \sim 1 \mu\text{m}$) rentrent bien dans le cadre de l'approximation.

Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne que « le spectre infrarouge est beaucoup moins connu » que celui du visible. Pourtant, tout calcul en physique est inutile si l'on ne peut tirer d'information de la valeur numérique obtenue.

12. Sans vibration, la géométrie linéaire de la molécule de CO_2 justifie d'avoir un moment dipolaire nul :

$$\vec{p} = \vec{0}$$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne qu'il s'agissait d'une « *beaucoup de candidat(e)s répondent que le moment dipolaire électrique de la molécule de CO_2 est constant sans justifier que sa valeur est nulle* ». Si des connaissances de géométrie moléculaire sont hors programme en MPI, la géométrie linéaire de la molécule est une connaissance connexe importante tant elle est présente sur le plan sociétal dans le cadre du réchauffement climatique, de même que la géométrie coudée de la molécule d'eau H_2O .

▷ Les barycentres des charges positives (carbone électropositif) et négatives (oxygènes électronégatifs) d'une molécule CO_2 sont confondus. Sa géométrie, AX_2 dans la théorie VSEPR, est linéaire. La molécule ne porte pas de doublets non liants, au contraire de la molécule H_2O , de type AX_2E_2 , qui est donc plane coudée.

13. Le mode symétrique maintient le barycentre des deux atomes d'oxygène confondu avec l'atome de carbone, donc ne contribue pas à développer un moment dipolaire pour CO_2 .

Le mode antisymétrique permet au barycentre des deux atomes d'oxygène d'osciller à ω_a autour du carbone, d'où l'apparition d'un moment dipolaire oscillant.

Les molécules de O_2 et de N_2 n'étant composées que d'atomes ne présentant aucune différence d'électronégativité, les vibrations de ces molécules ne sont pas susceptibles de faire apparaître un moment dipolaire oscillant.

Oscillations forcées et absorption du rayonnement

14. Étant donné $\underline{x} = \underline{C}e^{j\omega t}$, la représentation complexe de la vitesse s'écrit $\underline{v} = j\omega\underline{C}e^{j\omega t}$. Pour déterminer la puissance de la force de Lorentz électrique, on repasse en notation réelle :

$$v(t) = -\omega \operatorname{Re}(\underline{C}) \sin(\omega t) - \omega \operatorname{Im}(\underline{C}) \cos(\omega t)$$

Par définition de la puissance mécanique, on a :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle Fv \rangle = \langle qE \cos(\omega t)v(t) \rangle$$

La moyenne temporelle étant non-nulle pour le seul terme en $\cos^2(\omega t)$, il vient :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = -\frac{qE\omega}{2} \operatorname{Im}(\underline{C})$$

La puissance moyenne de la force exercée est donc bien proportionnelle à la partie imaginaire de \underline{C} .

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que les « *deux sources principales d'erreurs ont été une erreur de signe sur l'expression finale de la puissance mécanique et l'omission de la charge dans l'expression de la force électrique* ».

15. L'équation correspond au principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule, soumise à 3 forces :

- la force de Lorentz électrique $F_e(t) = qE \cos(\omega t)$.
- une force de rappel élastique $-m\omega_0^2 x(t)$ modélisant l'action du reste de la molécule.
- une force de frottements fluides $-m\alpha \dot{x}(t)$ modélisant les pertes énergétiques par rayonnement.

Il faut avoir $\alpha > 0$ pour que le mouvement soit borné.

16. En notation complexe, l'équation du mouvement devient $m(-\omega^2 + j\omega\alpha + \omega_0^2)\underline{C} = qE$.

$$\underline{C} = \frac{qE/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha}$$

17. On détermine la partie imaginaire de \underline{C} :

$$\text{Im}(\underline{C}) = -\frac{qE\omega\alpha}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2}$$

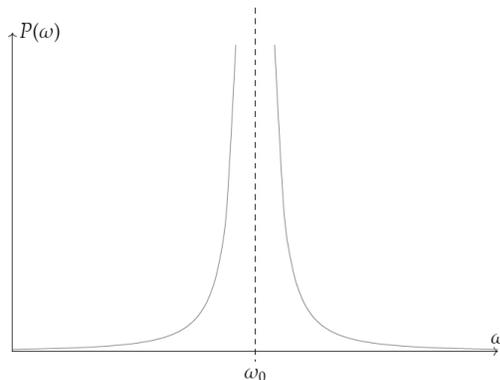
En injectant dans l'expression de la puissance moyenne obtenue plus haut on obtient :

$$\langle P \rangle = \frac{(qE\omega)^2\alpha}{2m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2}$$

18. Le résultat précédent est un produit de termes positifs, donc $\langle P \rangle > 0$, ce qui signifie que la force de Lorentz est motrice vis-à-vis de la molécule, donc que le travail réalisé est nécessairement pris sur l'énergie de l'onde.

19. D'après l'expression de la puissance moyenne, l'amortissement est faible si $\omega\alpha \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$. Dans ce cas :

$$\langle P \rangle \approx \frac{(qE\omega)^2\alpha}{2m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$



Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne que « beaucoup de candidat(e)s répondent que la valeur de α doit être faible sans préciser par rapport à quelle autre grandeur ». Un résultat numérique n'a de sens qu'avec sa dimension. Ce type de question fait naturellement appel à l'analyse dimensionnelle qu'il faut exploiter.

Effet des collisions entre molécules

20. L'équation du modèle étudié est :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{qE}{m} e^{j\omega t}$$

et on s'intéresse aux solutions $\underline{x} = \underline{A}e^{i\omega t} + \underline{B}e^{i\omega_0 t}$. On remarque que le terme harmonique de pulsation ω_0 satisfait le membre de gauche de l'équation. Par conséquent on isole directement l'amplitude complexe :

$$\underline{A} = \frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

▷ Remarquons que θ est une fonction de t , mais que $t - \theta$ est un instant fixé, à savoir le temps de la dernière collision, qui correspond à une condition initiale.

21. On écrit $\underline{x}(t - \theta) = 0$, donc $\underline{A}e^{i\omega(t-\theta)} + \underline{B}e^{i\omega_0(t-\theta)} = 0$. Ainsi :

$$\underline{B} = -e^{i(\omega-\omega_0)(t-\theta)} \underline{A} = -\frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i(\omega-\omega_0)(t-\theta)}$$

L'expression de $\underline{x}(t)$ est donc de la forme :

$$\underline{x}(t) = \frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(e^{i\omega t} - e^{i(\omega-\omega_0)(t-\theta)} e^{i\omega_0 t} \right) = \frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \underbrace{\left(1 - e^{i\theta(\omega_0 - \omega)} \right)}_C e^{i\omega t}$$

$$C = \frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(1 - e^{i\theta(\omega_0 - \omega)} \right)$$

▷ On constate que la dépendance en t de θ se retrouve dans C . Heureusement, sans quoi on aurait ramené une solution non monochromatique à une solution monochromatique. Néanmoins, $t - \theta$ ne dépendant pas du temps, \underline{B} est bien une constante. Cela reste en parfait accord avec les hypothèses utilisées pour la résolution.

22. La probabilité que θ ait la valeur $\theta + d\theta$ est égale au produit de la probabilité qu'il ait la valeur θ par la probabilité qu'il n'y ait pas de collisions entre $t = \theta$ et $t = \theta + d\theta$. Mathématiquement :

$$P(\theta + d\theta)d\theta = P(\theta) \left(1 - \frac{d\theta}{\tau} \right) \Rightarrow \frac{dP}{d\theta} = -\frac{P}{\tau}$$

La solution de cette équation est $P(\theta) = K e^{-\theta/\tau}$, et la condition de normalisation impose :

$$\int_0^{+\infty} P(\theta)d\theta = 1 \text{ donc } K = \frac{1}{\tau} \text{ et on a bien } P(\theta) = \frac{e^{-\theta/\tau}}{\tau}$$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que « l'immense majorité des candidat(e)s a compris que $P(\theta)$ devait être la solution de l'équation différentielle du premier ordre à trouver mais malheureusement le raisonnement permettant d'établir cette équation est très approximatif et peu clair. »

☑ Le rapport du jury mentionne que « le préfacteur 1 de l'exponentielle, qui résultait d'une condition de normalisation la valeur de ce préfacteur, est justifiée à tort par la condition $P(\theta) = 1/\tau$ ». Une condition initiale n'est pas une condition de normalisation.

23. Moyenne de \underline{x} par rapport à la distribution de probabilité de θ :

$$\begin{aligned} \langle \underline{x}(t) \rangle_{\theta} &= \int_0^{+\infty} \underline{x}(t)_{\theta} P(\theta) d\theta = \frac{qE}{m\tau(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} (1 - e^{i\theta(\omega_0 - \omega)}) e^{-\theta/\tau} d\theta \\ &= \frac{qE}{m\tau(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \left(\tau - \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i(\omega_0 - \omega)} \right) \\ &= \underbrace{-\frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{i\tau(\omega_0 - \omega)}{1 - i\tau(\omega - \omega_0)}}_{C'} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

24. On détermine la partie imaginaire de C' :

$$\text{Im}(C') = -\frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{\tau(\omega_0 - \omega)}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2} = -\frac{qE}{m(\omega_0 + \omega)} \frac{\tau}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2} < 0$$

On peut ainsi calculer la puissance :

$$\langle P \rangle = -\frac{qE\omega}{2} \text{Im}(C') = \frac{(qE)^2}{2m(\omega_0 + \omega)} \frac{\omega\tau}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2}$$

Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne que « les mauvaises réponses à cette question sont dues essentiellement à la propagation d'erreurs faites aux questions préalables ou à des erreurs d'étourderie. La plupart de ces erreurs auraient pu être évitées en vérifiant l'homogénéité du résultat final. ». Encore une fois, de l'analyse dimensionnelle judicieuse peut démarquer des candidats de même niveau...

25. Pour ω proche de ω_0 on a $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, dans les deux sens. Dès lors :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{(qE)^2}{2m(\omega_0 + \omega)} \frac{\omega\tau}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2} \sim \frac{(qE\omega)^2}{4m\omega^2} \frac{\tau}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2} \\ &\sim \frac{(qE\omega)^2}{4m} \frac{\tau}{\omega^2 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2} \sim \frac{(qE\omega)^2}{4m} \frac{\tau}{\omega^2 + \frac{\tau^2}{4}(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \\ &= \frac{(qE\omega)^2}{4m} \frac{4/\tau}{4\omega^2/\tau^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \frac{(qE\omega)^2}{2m} \frac{f(\tau)}{\omega^2 f(\tau)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \end{aligned}$$

On retrouve exactement l'expression de la puissance obtenue en question 17 dans le cas où $\alpha = f(\tau) = \frac{2}{\tau}$.

▷ La formule " τ suffisamment grand" de l'énoncé est ambiguë mais devient plus claire en regardant le résultat : on constate qu'il est nécessaire d'avoir $\omega \sim \omega_0$ mais, pour conserver deux termes au dénominateur, τ doit être suffisamment grand pour que $\tau|\omega - \omega_0| \sim 1$.

26. Il faut ajouter la solution générale de l'équation homogène, de forme $\underline{x}_H(t) = K_1 e^{i\omega_0 t} + K_2 e^{-i\omega_0 t}$. Le premier terme est déjà contenu en partie dans la solution : il manque donc un terme de la forme $K e^{-i\omega_0 t}$.

27. On considère donc la solution suivante :

$$\underline{x}(t) = \underline{A}' e^{i\omega t} + \underline{B}' e^{i\omega_0 t} + \underline{K} e^{-i\omega_0 t}$$

On obtient facilement que $\underline{A}' = \underline{A}$ déterminé précédemment, car les exponentielles harmoniques à ω_0 vérifient l'équation homogène. On écrit ensuite les conditions :

$$\begin{cases} x(t-\theta) = 0 \\ \dot{x}(t-\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A}e^{i\omega(t-\theta)} + \underline{B}'e^{i\omega_0(t-\theta)} + \underline{K}e^{-i\omega_0(t-\theta)} = 0 \\ \underline{A}i\omega e^{i\omega(t-\theta)} + \underline{B}'i\omega_0 e^{i\omega_0(t-\theta)} - \underline{K}i\omega_0 e^{-i\omega_0(t-\theta)} = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

En effectuant les combinaisons $(2) + i\omega_0(1)$ et $(2) - i\omega_0(1)$, on obtient :

$$\underline{B}' = -\frac{\omega + \omega_0}{2\omega_0} \underline{A} e^{i(\omega - \omega_0)(t-\theta)} \quad \underline{K} = \frac{\omega - \omega_0}{2\omega_0} \underline{A} e^{i(\omega + \omega_0)(t-\theta)}$$

D'où :

$$\underline{x}(t) = \frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(e^{i\omega t} - \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_0} e^{i(\omega - \omega_0)(t-\theta)} e^{i\omega_0 t} + \frac{\omega - \omega_0}{2\omega_0} e^{i(\omega + \omega_0)(t-\theta)} e^{-i\omega_0 t} \right)$$

Pour $\omega \sim \omega_0$, le troisième terme disparaît, $\frac{\omega + \omega_0}{2\omega_0} \sim 1$ et on retrouve bien l'expression obtenue question 21 :

$$\underline{x}(t) = \frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(e^{i\omega t} - e^{i(\omega - \omega_0)(t-\theta)} e^{i\omega_0 t} \right)$$

28. L'effet des collisions se traduit à travers la fonction $f(\tau)$. Pour des valeurs de τ de plus en plus faibles, les collisions ont tendance à diminuer le maximum de résonance en $\omega = \omega_0$ (valeur finie puisque $\alpha = f(\tau)$ traduit ici un terme dissipatif) et à augmenter la largeur de la bande passante. Autrement dit, pour τ "grand", on a une résonance fortement piquée autour de ω_0 , alors que pour des τ plus faibles, la résonance est moins intense et la bande passante plus large.

Partie III – Effet de serre

Certaines molécules de l'atmosphère absorbent les rayonnements infrarouges émis par la Terre avant de les réémettre sans direction privilégiée. Ainsi, une partie est dirigée vers le sol, qui s'échauffe pour tendre vers un équilibre radiatif. On parle communément d'effet de serre même si, dans une serre, l'échauffement est davantage due au fait que la convection est empêchée par les dimensions de la serre qu'à la réémission thermique du sol.

29. L'énoncé donne $\frac{dP}{dz} = -MgN(z)$ et $\frac{dT}{dz} = -\Gamma$. Par ailleurs, la loi des gaz parfaits donne :

$$\frac{P(z)}{T(z)} = RN(z)$$

En divisant entre elles les deux premières équations, et en injectant la troisième, il vient :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{Mg}{R\Gamma} \frac{P}{T} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{R\Gamma}{Mg} \frac{dP}{P}$$

L'intégration de cette équation différentielle fournit le résultat attendu :

$$\frac{T(z)}{T(0)} = \left(\frac{P(z)}{P(0)} \right)^\beta \quad \beta = \frac{R\Gamma}{Mg}$$

Conseils utiles

☑ Le rapport du jury mentionne que « quelques candidat(e)s sont parvenus à déterminer l'expression du coefficient β par analyse dimensionnelle ». La fin justifie les moyens, même si la démonstration était attendue.

30. Application Numérique :

$$\beta = \frac{8 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 6.10^{-3} \text{ K.m}^{-1}}{30.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} \times 10 \text{ m.s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0,16$$

31. En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, le bilan énergétique donne $\sigma T_E^4 = (1 - \alpha)\Phi$, d'où :

$$T_E = \left(\frac{(1 - \alpha)\Phi}{\sigma} \right)^{1/4}$$

Conseils utiles

✓ Le rapport du jury mentionne qu'un « grand nombre de copies ont omis de prendre en compte le terme $(1 - \alpha)$ ». La confusion entre puissance réfléchie et absorbée est d'autant plus rédhitoire que l'énoncé le précise clairement : la rigueur (de lecture, de rédaction) est le meilleur outil pour pallier aux erreurs classiques et d'étourderies.

32. D'après la loi de Dalton, la pression partielle en CO_2 vaut $p_{\text{CO}_2}(z) = xP(z)$. Ainsi,

$$\frac{dp_{\text{CO}_2}}{dz} = x \frac{dP(z)}{dz} = -Mg x N(z) = -Mg N_{\text{CO}_2}$$

Et ainsi, en utilisant la définition de l'énoncé :

$$\mu(z) = \int_z^{+\infty} N_{\text{CO}_2}(z') dz' = -\frac{x}{Mg} \int_z^{+\infty} \frac{dP}{dz'} dz' = \frac{x}{Mg} P(z)$$

Étant donnée la condition $\mu = \mu_c$ pour $z = h$, on déduit :

$$P(h) = \frac{Mg\mu_c}{x}$$

33. D'après le résultat de la question 29, on a :

$$T(0) = \left(\frac{P(0)}{P(h)} \right)^\beta T(h) = \frac{T_E P_0^\beta}{(Mg\mu_c)^\beta} x^\beta$$

On voit que la température au sol varie comme x^β , qui est une fonction croissante (car $\beta > 0$).

34. En vertu de la loi de Stefan-Boltzmann, l'aire sous la courbe, qui correspond à la puissance totale émise, varie comme la puissance quatrième de la température.

35. La loi du déplacement de Wien donne la position du maximum d'émission via la relation :

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = \frac{T}{n_{\text{max}}} = \text{cste} \Rightarrow n_{\text{max}} \propto T$$

Sans pouvoir le vérifier numériquement, on constate sur la figure que n_{max} croît avec T .

36. Un carreau correspond à 10 W m^{-2} . Le nombre de carreaux encadrant la courbe expérimentale est 18 carreaux - 35 carreaux. En prenant la moyenne (26 carreaux), on propose une estimation de la puissance émise par la Terre à $260 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

37. L'augmentation de la concentration en CO_2 aurait pour conséquence de diminuer le minimum au voisinage de 700 cm^{-1} , donc d'augmenter le creux du spectre d'émission à ce niveau.



Physique A (XE)

Filière PC - Session 2023

Durée : 4h00

Calculatrices : non autorisées

Thématiques : thermodynamique, électromagnétisme

« Le sujet [...] proposait d'étudier un certain nombre d'aspects du chauffage inductif de métaux. Il mêlait une étude de l'émission du corps noir puis du corps gris [et] une étude des phénomènes inductifs sur la base des équations de Maxwell [avant d'aborder] des phénomènes thermiques en introduisant la transformation de Laplace. »

« La moyenne des 1309 candidats français [était] de 9,30/20 avec un écart-type de 3,14. »

Un sujet d'actualité. En métallurgie, le cœur d'une forge peut atteindre jusqu'à 3000°C. Pour estimer la température d'un métal qu'il travaille, un forgeron peut s'appuyer sur la température de couleur, une grandeur basée sur la lumière visible que le métal rayonne. On distingue la température de couleur d'incandescence (premier travail du métal) et celle de revenu (second travail du métal qui intervient après la trempe pour renforcer le métal, dur mais très fragile), comme présenté dans le document ci-après. En observant ces couleurs, un forgeron peut estimer la température et donc la modifier en fonction des besoins grâce à un contrôle rigoureux du débit d'air dans la forge. Historiquement, ce fut d'abord des soufflets en bois (apparus au 7^{ème} millénaire en Chine, essor au V^{ème} siècle avant J.C.) qui furent employés, puis des soufflets métalliques (fin du XIX^{ème} siècle), puis des ventilateurs centrifuges progressivement motorisés avec la démocratisation de l'électrification. Alliées du forgeron, les températures de couleur se retrouvent dans la législation française, qui stipule depuis 2018 que l'éclairage public doit avoir une valeur maximale de température de couleur de 3000 K. L'objectif est de réduire les nuisances lumineuses, qui affectent la biodiversité et notre perception de la voûte céleste.

